Educação Gráfica, Brasil, Bauru. ISSN 2179-7374.
V. 23, Nº. 3. Dezembro de 2019. Pp. 93 - 110

A GEOMETRIA PROJETIVA SINTÉTICA DE JEAN-VICTOR PONCELET

JEAN-VICTOR PONCELET'S SYNTHETIC PROJECTIVE GEOMETRY

Jansley Alves Chaves[1]

Leandro Silva Dias[2]

Resumo

Em 1813 Jean-Victor Poncelet, oficial da grande armée napoleônica, encontra-se cativo na cidade de Saratoff, após ter sido feito prisioneiro na malfadada campanha francesa na Rússia. Neste período (1813-1814), escreve sete manuscritos, que na historiografia serão conhecidos como *Les cahier de Saratoff*, contendo a gênese do seu tratado de 1822, *Traité des Propriétés projectives des figures*, marco histórico, entre outros que surgiram no século dezenove, de um novo ramo da matemática, a Geometria Projetiva. Tais cadernos, embora sejam a gênese do seu tratado de 1822, só foram publicados integralmente em 1862 em seu livro *Applications d'Analyse et de Géométrie.* Neste isolamento, distante de tudo, sem acesso a uma biblioteca científica, nos perguntamos como pôde Poncelet escrever tais cadernos, quais foram suas lembranças, diretas e indiretas. Em seu livro, Poncelet manifesta quais foram suas motivações ao escrever os cadernos de Saratoff, deixando claro também, quais foram suas influências diretas. Com base em nossas pesquisas, suspeitamos que as influências indiretas que motivaram Poncelet tenham vindo da Perspectiva. Buscamos, então, apresentar as razões para tais suspeitas e, paralelamente, vamos apresentar ao leitor a Geometria Projetiva Sintética de Poncelet.

Palavras-chave: geometria projetiva sintética; Transformações geométricas; grupos de transformações.

Abstract

In 1813 Jean-Victor Poncelet, officer of the great Napoleonic Armée, was held captive in the city of Saratoff, after having been held prisoner in the unfortunate French campaign in Russia. During this period (1813-1814), he wrote seven manuscripts, which in historical terms are known as The Notebooks of Saratoff, containing the genesis of his treatise of 1822, *Traité des Propriétés projectives des figures*, a historical mark, among others that appeared in the nineteenth century, from a new field of mathematics, the Projective Geometry. These notebooks, although they were the genesis of his treatise of 1822, were only published in full in 1862 in his book *Applications d'Analyse et Géométrie*. During this isolation, far from everything, without access to a scientific library, we wonder how Poncelet could write such notebooks, which were his direct and indirect memoirs. With his book, Poncelet manifests his motivations in writing Saratoff's notebooks, making it clear what were his direct influences. On the basis of our research, we suspect that the indirect influences that motivated Poncelet came from the Perspective. We then aim to present the reasons for such suspicions and, in addition, we will introduce the reader to Poncelet's Synthetic Projective Geometry.

Keywords: synthetic projective geometry; Geometric transformations; groups of transformations.

[1] Doutorando, UL (Université de Lorraine), Nancy, Lorraine, França, chavesrizo@gmail.com ;

[2] Doutorando, UL (Université de Lorraine), Nancy, Lorraine, França, leandrosilvadias123@hotmail.com ;

1. Introdução

Neste artigo abordaremos a Geometria Projetiva Sintética de Jean-Victor Poncelet (1788-1867), geômetra, hábil inventor, eminente professor, engenheiro, escritor e militar, sobre quem muito já se escreveu, englobando suas produções e suas atividades em todas as áreas que percorreu, o que torna nossa tarefa mais meticulosa e cuidadosa, já que, se por um lado temos vasto material de consulta, por outro, temos consciência de que, devemos apresentar ao leitor uma perspectiva inédita, tendo o cuidado de abordar um assunto que seja original e que, de fato, contribua na construção e no aprimoramento das informações já existentes sobre este importante personagem. Para tanto, parece-nos que oferecer ao leitor, sobretudo ao leitor brasileiro, uma visão da Geometria Projetiva Sintética de Poncelet seria algo inédito na produção editorial nacional, descrevendo como a compreensão da geometria por trás da ideia de projeção foi desenvolvida antes de Poncelet e sua influência no desenvolvimento da Geometria Projetiva Sintética.

Em razão de uma busca de originalidade e buscando, também, despertar o interesse do leitor, surgiram alguns questionamentos que tentaremos responder ao longo deste artigo.

Questão que, inicialmente, conduziu nosso artigo:

- se efetivamente é inédita a nossa abordagem.

Em conexão com a questão acima surgiram outras, naturalmente:

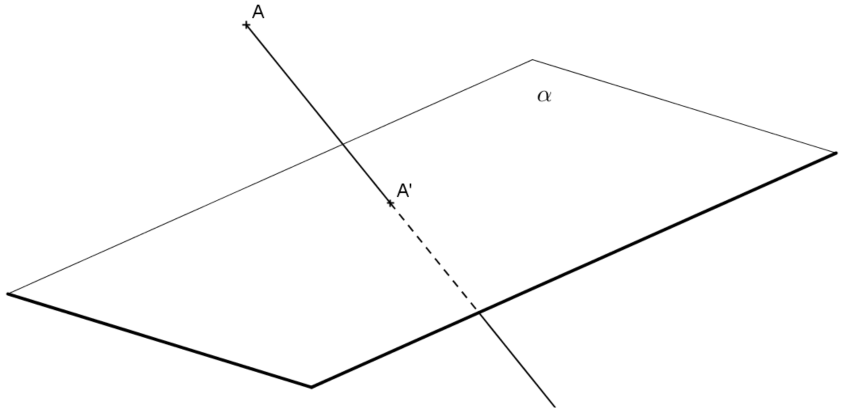
- quais foram as inspirações de Poncelet;
- qual Geometria se desenvolvia no início do século dezenove;
- havia alguma corrente Sintética.

2. A ideia Intuitiva de Projeção em Geometria

A ideia de projeção é bastante intuitiva e de certa forma autoexplicativa. Quando dizemos que um objeto foi projetado, pressupomos um anteparo onde ocorrerá tal projeção. Assim, para darmos exemplos matemáticos, podemos imaginar um plano no qual projetaremos a imagem de um ponto do espaço, não pertencente ao plano. Nesta atividade de imaginação, não há nenhuma condição para tal projeção, obviamente devemos nos atentar que dois pontos distintos (um no espaço e sua imagem no plano) determinam uma única reta, que denotaremos por reta projetante. Desta forma, sejam um ponto A, um plano α e um ponto A', dizemos que A', imagem do ponto A, é a projeção de A sobre o plano α. Em outras palavras, A' é o traço da reta projetante no plano α, conforme a figura 1. Observe que nesta definição pouco importa a ortogonalidade.[3]

[3] Ortogonalidade referem-se às curvas, ou suas projeções, que formam, ao se intersectarem, quatro ângulos côngruos.

Figura 1: Projeção do ponto A, com imagem A', no plano α[4]



Fonte: Elaborado pelos Autores.

3. A Ideia Intuitiva da Palavra Sintética em Geometria

A ideia de síntese em Geometria é colocada em oposição a ideia de análise e tem um conceito diferente dos argumentos apresentados por Euclides de Alexandria (aprox. 300 a.C.)[5] nos Elementos[6]. Euclides apresentou seu trabalho com construções que conduziam do elementar ao complexo, ou seja, as construções foram sendo apresentadas por "partes" até chegar ao todo. Isso é exatamente o que faz hoje a análise: analisam-se as partes e se obtém o todo. Ao contrário, quando abordamos um problema por Geometria Sintética, por exemplo, temos a ideia do todo e obtemos os passos da solução. Desta forma, quando abordamos um problema pelo viés da Geometria Sintética, vislumbramos o final e estabelecemos o processo de construção.

4. A Geometria Projetiva Sintética no editorial nacional

Iniciamos, então, por uma busca na literatura nacional, sobre assuntos relativos à Geometria Projetiva Sintética, para que pudéssemos verificar se estávamos abordando algo que justificasse o ineditismo no campo editorial nacional. Como praticamente nada, com o enfoque que pretendemos direcionar no nosso trabalho, foi encontrado na literatura nacional, pré-julgamos, então, interessante a abordagem dos trabalhos de Poncelet sob a perspectiva da Geometria Projetiva Sintética, pois avaliamos ser um assunto de extremo interesse ao leitor, que, poderá assim aprofundar seus conhecimentos no assunto. Na verdade, quando nos deparamos com algum assunto, na produção editorial nacional, sobre Geometria Projetiva Sintética, observamos que é superficialmente abordado, ora discute-se apenas a Geometria

[4] Fonte: todas as contruções geométricas neste trabalho foram realizadas pelos autores utilizando a ferramenta de Geometria dinâmica Geogebra.

[5] Euclides de Alexandria (c. 300 a.C.) foi um professor, matemático platónico e escritor grego, muitas vezes referido como o "Pai da Geometria". Além de sua principal obra, Os Elementos, Euclides também escreveu sobre perspectivas, seções cônicas.

[6] Os Elementos de Euclides é um tratado matemático consistindo de 13 livros e contend uma coleção de definições, postulados e axiomas.

Projetiva sem um viés sintético, ou seja, sem a construção com os instrumentos euclidianos, total ou parcialmente, ora apresentam-se algumas ingênuas abordagens da Geometria Sintética, sem apresentar o conceito projetivo que a sustenta. Um exemplo clássico, somente para ilustrar, sobre abordagens que encontramos na literatura nacional em Geometria Sintética, por exemplo, sobre tangência, um assunto de extrema relevância, é a construção de tangentes às circunferências de círculos por um ponto exterior e coplanar à curva. Neste caso, é quase certo que se encontrem apenas a solução que se utiliza do arco-capaz de 90^0. Uma solução muito limitada quanto aos axiomas da Geometria euclidiana, deixando o leitor, iniciante na Geometria e ávido por aprofundamento, com a sensação de que outras construções são inexistentes. No artigo sobre tangência [CHAVES et al, 2018] são apresentadas sete soluções distintas de construções sobre o assunto, dentre as quais uma utilizando apenas a régua[7], e outra utilizando apenas o compasso[8].

5. A Geometria do Compasso e a Geometria da Régua

É interessante esclarecer ao leitor iniciante em Geometria Sintética, que os instrumentos euclidianos são: régua não graduada e compasso. Quando se utiliza apenas o compasso, por exemplo, passa-se a ter uma restrição à construção, ou seja, as retas serão definidas apenas por dois pontos distintos, que neste caso serão intersecções de arcos de circunferências de círculos, e não mais traçadas, de tal forma que retas serão somente visualizadas. Embora a utilização apenas do compasso seja um limitador na construção, é interessante observar que isso possibilita uma maior precisão (quanto menos instrumentos menor os erros propagados) na Geometria Sintética e, o mais surpreendente, é que todas as construções possíveis com régua e compasso são possíveis apenas com a utilização do compasso[9]. Essa Geometria é dita: Geometria do Compasso. Assim definida por Mascheroni: “Eu chamo Geometria do Compasso aquela, que por meio da utilização apenas do compasso, sem a ajuda da régua, determina a posição dos pontos” (DELL’OMO, 1799, p.1)[10]. Portanto, nada mais é do que a Geometria euclidiana utilizando apenas o compasso. Por outro lado, quando se utiliza apenas a régua estamos diante de uma nova geometria: a Geometria da Régua, onde traçamos apenas retas e que é a área de atuação da Geometria Projetiva.

6. O renascer de uma nova Geometria

No início do século dezenove uma "nova" Geometria estava em curso: A Geometria Projetiva. É natural dizer uma "nova" Geometria, contudo iremos ver no decorrer deste artigo que há teoremas da Geometria Projetiva nos trabalhos de antigos geômetras, é o caso, por exemplo, citando alguns poucos exemplos, de Pappus (séc. IV d.C.)[11] na antiguidade, e outros mais

---

[7] Quando se utiliza apenas a régua estamos diante da Geometria da Régua, que no século XIX, tornou-se um ramo da Geometria: a Geometria Projetiva.

[8] Quando se utiliza apenas o compasso estamos diante da Geometria do Compasso. É uma Geometria Euclidiana com a utilização apenas deste instrumento de construção.

[9] Referenciamo-nos neste trabalho à obra de Mascheroni em Francês (1799). Entretanto, há um excelente trabalho, em português, de Souza (DE SOUSA; DE OLIVEIRA, 2018).

[10] J'appelle Géométrie du compas, celle qui, par le moyen du compas seulement, et sans le secours de la règle, détermine la position des points.

[11] Pappus de Alexandria, em grego Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς um dos mais importantes matemático da Grécia antiga, viveu no século IV d. C.

recentes tais como Desargues (1591 - 1661)[12] e Pascal(1623 - 1662)[13] no século dezessete. Assim, essa Geometria não nos parece ser tão "nova". Então, somos conduzidos à outras questões:

- qual a razão de emergir, essa Geometria, no início do século dezenove;
- o que é uma nova Geometria;

Para tentar responder tais indagações, vamos revisitar alguns assuntos.

7. O que é Geometria

A ideia de Geometria como construção de pensamento remonta à Grécia antiga e tem como referência principal os Elementos de Euclides. Talvez a razão principal da importância dada à obra baseia-se nos princípios adotados pelo autor: a axiomatização. Isto significa que em determinado assunto tudo que irá emergir segue uma sequência lógica de um conjunto finito de premissas básicas. Euclides concebe sua Geometria baseada nas ideias que magistralmente Bicudo as coloca:

> Os conceitos não definidos são chamados conceitos primitivos, e todos os outros, conceitos derivados. As proposições aceitas sem demonstração são ditas axiomas, e as demonstradas, teoremas. Assim, resumidamente, uma teoria matemática é constituída de conceitos primitivos e derivados, de axiomas e teoremas. (BICUDO, 1998, p.15)

Destas ideias, Euclides apresenta dez proposições, são os conceitos primitivos e seus derivados, conforme a citação de Bicudo, que utilizam os conceitos de distâncias, ângulos e paralelismo. Assim, toda geometria que satisfaz essas proposições é considerada euclidiana.

Euclides elenca, em seus *Elementos*, vinte e três definições, cinco axiomas, cinco postulado, os quais listamos como nota de fim. A partir das definições, dos axiomas e dos postulados fez várias demonstrações. Modernamente os 5 postulados são tratados como axiomas e são com eles que iremos construir a Geometria Euclidiana, ou seja, a partir dos seguintes enunciados:

- por dois pontos distintos passa uma única reta;
- segmentos finitos podem ser prolongados às retas;
- todo ponto é centro de um círculo com dado raio;
- todos o a ângulos retos são iguais;
- por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela.[i]

Aqui a questão é perceber que os quatros primeiros axiomas são de uma percepção sensitiva, ou seja, usando os sentidos naturais podemos, em um ambiente finito, percebê-los. Contudo, isto não é evidente quando tratamos do quinto axioma. A ideia de retas paralelas nos diz que o ponto comum está no infinito e, portanto, não somos capazes de perceber pelos

[12] Matemático amador, arquiteto e engenheiro militar francês, conhecido por um famoso teorema de Geometria Projetiva.

[13] Matemático, físico, inventor, filósofo e teólogo católico francês. Publica *Essay pour les coniques* (1640), obra na qual está formulado o célebre teorema de Pascal de Geometria Projetiva.

sentidos, se tal afirmação é verdadeira. Assim, novamente, deparamo-nos com outras indagações.

- o quinto axioma é uma consequência dos outros quatros;
- quanto à completude: todas as questões sobre figuras geométricas podem ser respondidas por esses axiomas;
- quanto à consistência: será que esses axiomas não são contraditórios;

A noção de paralelismo, a noção de distância e a noção de ângulos estão inseridas nesta Geometria. Há, portanto, na Geometria Euclidiana a ideia de congruência, ou seja, as figuras são "rígidas". No século dezenove a visão dos matemáticos migrou de uma tentativa de buscar provar se o quinto axioma era na verdade um teorema para, então, pensar em construir uma Geometria que não o considerasse. Isto fica mais claro ao leitor com o *Erlangen programme*[14] proposto por Félix Klein (1849 - 1925)[15] em 1872.

Klein propõe classificar uma determinada Geometria por Grupos de Transformações. Por exemplo, na Geometria Euclidiana há preservação das distâncias, onde temos os seguintes Grupos de transformações: translações, rotações e reflexões, que, na verdade, são movimentos rígidos (translações e rotações) no plano e mais as reflexões. Identificar este Grupo de transformação tem o mesmo significado que identificar a Geometria Euclidiana.

Imaginemos a projeção de uma figura sobre um plano, a pintura de uma paisagem, por exemplo, em que o centro de projeção está no olho do observador que a contempla. Neste processo de projeção, comprimentos e ângulos são necessariamente distorcidos, para que se tenha uma ilusão de profundidade, afinal estamos projetando um objeto imerso no espaço tridimensional, em um plano - o quadro - um objeto bidimensional. Embora distorcidos, os ângulos, os segmentos, etc..., a estrutura geométrica original pode normalmente ser reconhecida e isto se deve às propriedades invariantes sobre projeção. Portanto, a questão passa a ser: reconhecer se o conceito de grandeza e os conceitos relacionados de congruência e semelhança são essenciais à Geometria ou se figuras geométricas podem ter propriedades ainda mais profundas, que não sejam destruídas por outras transformações. Com a clara intenção de dotar à Geometria pura de artifícios que possui a Geometria analítica, identificando e analisando as figuras que permanecem com as mesmas propriedades após um número finito de projeções acrescido da ideia de continuidade, Poncelet deixou um verdadeiro legado: A Geometria Projetiva. A questão que surge de imediato é a seguinte:

- se usarmos outro Grupo de Transformação, ou seja, se distância, ângulos e paralelismo não forem preservados, seremos conduzidos à outra Geometria?

8. Transformações Projetivas

Há um Grupo de Transformações no plano que são as Transformações Projetivas. Neste Grupo, segundo a filosofia de Klein, apresentada no *Erlangen programme*, seremos capazes de construirmos a Geometria Projetiva.

---

[14] *Erlangen programme* de 1872.

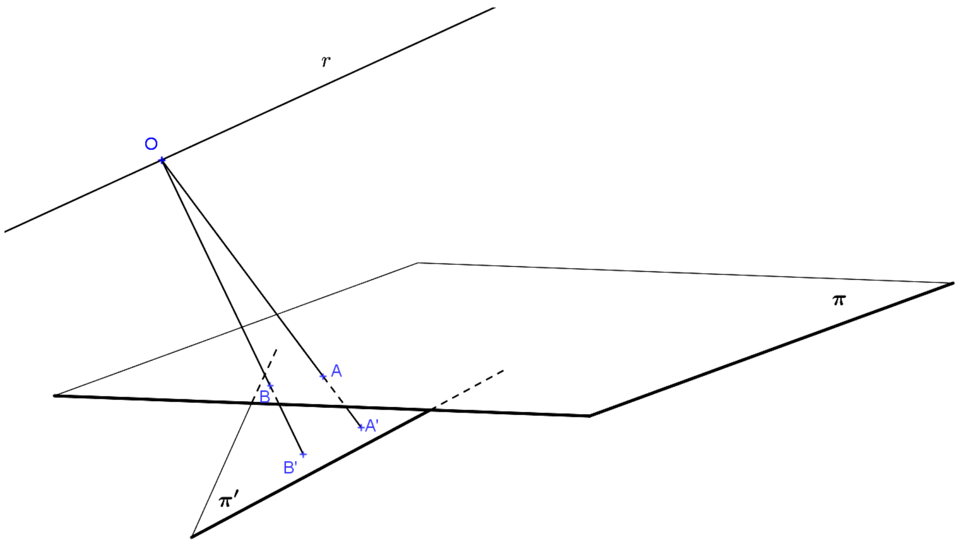
[15] Felix Christian Klein foi um matemático alemão. Seu trabalho incidiu nas interligações entre a teoria dos Grupos e a Geometria, *Erlangen programme*. É neste programa que irá ser classificada a geometria feita por Poncelet, entre outros, de Geometria Projetiva.

Vamos tentar explicar essa transformação: em um plano no espaço, vejamos o que ocorre com as transformações no plano.

Os movimentos rígidos do espaço são: translações e rotações em torno de um eixo. Observe que estamos abordando o espaço, porém interessados no que ocorre no plano.

Conforme a Figura 2 a semirreta de origem no ponto O conduz o ponto A do plano π ao ponto A' do plano π' da mesma forma que outra semirreta de mesma origem conduz o ponto B ao ponto B'. É fácil perceber que há uma bijeção, e não poderia ser diferente, pois estamos em um Grupo. Entretanto, há pontos do plano π que não possuem imagem em π'. Suponha uma reta r paralela ao plano π', esta terá um traço em π que não terá imagem em π'a uma distância finita, ou seja, sua imagem estará no infinito. Para contornar esse problema, que é uma razão do conceito das paralelas, na Geometria Projetiva iremos admitir que as retas paralelas são concorrentes a uma distância finita.

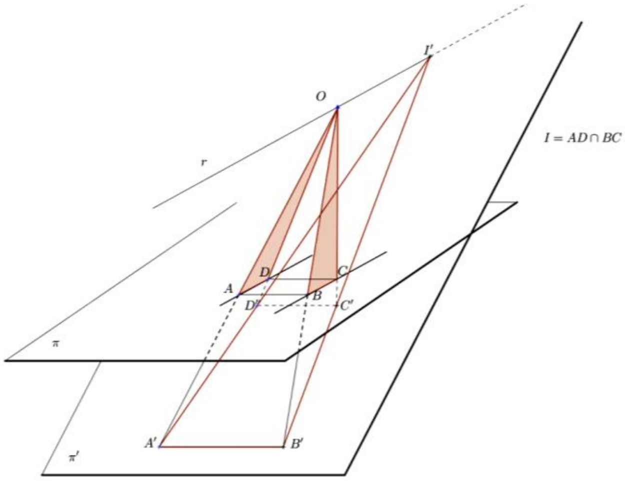
Figura 2: A imagem do traço de r no plano π'. r // π'



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Conforme a Figura 3 temos as retas AD e BC paralelas entre si e contidas no plano π. O ponto O, centro de projeção, não pertencente aos planos π e nem ao π'. Sendo o plano π' não paralelo ao plano π. As retas $A'D'$ e $B'C'$, contidas no plano π' são projeções das retas AD e BC respectivamente. A reta r paralela ao plano π e passando pelo ponto O é a intersecção dos planos formados pelos triângulos AOD e BOC. As retas $A'D'$ e $B'C'$ se intersectarão no ponto I', traço da reta r no plano π'. Desta forma, o ponto I, intersecção das retas paralelas AD e BC, passa a ter sua imagem I'não mais no infinito e sim a uma distância finita.

Figura 3: O ponto I' imagem do ponto I



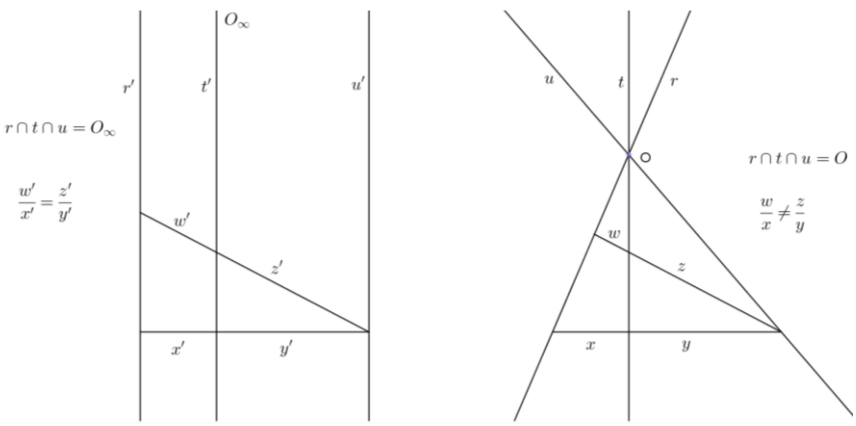
Fonte: Elaborado pelos Autores.

Claramente essa Geometria não é euclidiana, pois as distâncias não são preservadas, os ângulos não são preservados e as paralelas são concorrentes às distâncias finitas. Desta maneira, os pontos ao infinito passam a fazer parte do plano Euclidiano e denotaremos este novo plano por Plano Projetivo. Assim, teremos uma reta, no plano projetivo, ao qual todos os pontos de intersecção das retas "paralelas" pertencerão. Será a reta do infinito que está contida no plano projetivo. Com isso, temos outra indagação:

- quais são as quantidades preservadas por essa Geometria Projetiva? em outras palavras, quais são os Grupos de Transformações invariantes na Geometria Projetiva?

Vejamos se proporções são preservadas.

Figura 4: Igualdade e desigualdade de proporções



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Se considerarmos retas paralelas, cujo o ponto de intersecção está no infinito, cortadas por uma transversal, temos que a proporção é verdadeira segundo o teorema de

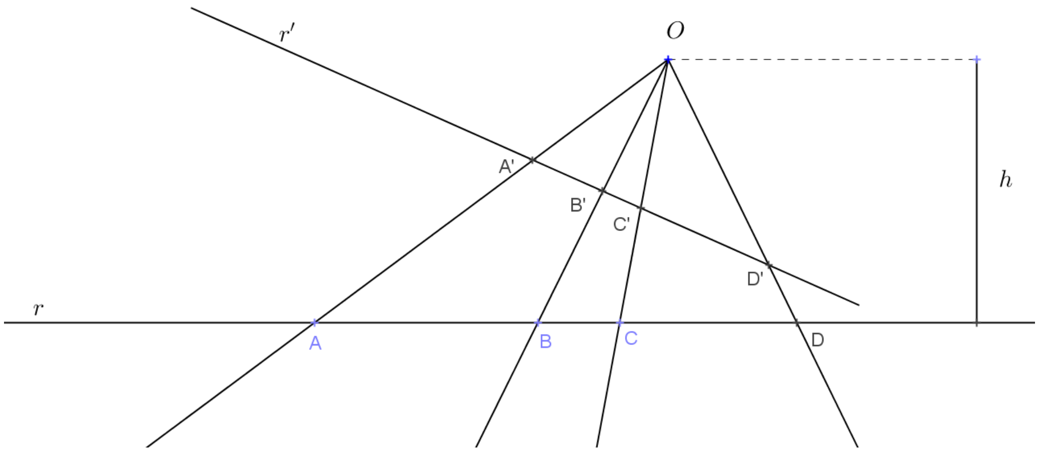
Tales[16], conforme a figura 4 à esquerda. Entretanto, no Plano Projetivo o ponto ao infinito, Ponto O, torna-se finito, conforme a figura 4 à direita. Desta forma, as proporções não são mais preservadas. E, portanto, não são de interesse nesta Geometria.

Vejamos então, razões de proporções, ou razões cruzadas. Sejam os pontos A, B, C e D sobre uma reta r qualquer orientada[17]. A razão cruzada é apresentada pela seguinte constante:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD} \Longrightarrow \frac{\frac{AB}{AD}}{\frac{CB}{CD}} = Const.$$

Procuremos verificar se as razões cruzadas são invariantes. Para tanto, traçaremos um feixe de semirretas com origem em um ponto O, não incidente à reta r, conforme figura 5.

Figura 5: Feixe de semirretas com origem no ponto O



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Vamos agora determinar a relação entre as áreas dos triângulos cujas as bases são os segmentos da razão cruzada.

$$\Delta\ OAB = \frac{1}{2}\ AB.h = \frac{1}{2} AO.OB.sen\ A\hat{O}B$$
$$\Delta\ OAD = \frac{1}{2}\ AD.h = \frac{1}{2} AO.OD.sen\ A\hat{O}D$$

---

[16] Tales de Mileto, (c.624 — 546 a.C.) foi um filósofo, matemático, engenheiro da Grécia Antiga.

[17] Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado origem do segmento, o segundo chamado extremidade.

$$\Delta\ OCB = \frac{1}{2}\ CB.h = \frac{1}{2}OB.OC.sen\ C\hat{O}B$$
$$\Delta\ OCD = \frac{1}{2}\ CD.h = \frac{1}{2}OC.OD.sen\ C\hat{O}D$$
$$\frac{\frac{AB}{AD}}{\frac{CB}{CD}} \Longrightarrow \frac{\frac{\frac{1}{2}AO.OB.sen\ A\hat{O}B}{\frac{1}{2}AO.OD.sen\ A\hat{O}D}}{\frac{\frac{1}{2}OB.OCsen\ C\hat{O}B}{\frac{1}{2}OC.OD.sen\ C\hat{O}D}} = \frac{\frac{sen\ A\hat{O}B}{sen\ A\hat{O}D}}{\frac{sen\ C\hat{O}B}{sen\ C\hat{O}D}} = Const.$$

Observe que independe da reta transversal ao feixe, ou seja, a razão cruzada é invariante sobre projeção, pois é claro na relação acima que depende apenas dos senos dos ângulos. Assim, por exemplo, uma reta transversal r' que intersecta o feixe nos pontos A', B', C' e D' possui a mesma razão cruzada:

$$\frac{A'B'}{A'D'} = \frac{C'B'}{C'D'} \Longrightarrow \frac{\frac{A'B'}{A'D'}}{\frac{C'B'}{C'D'}} = Const.$$

9. Perspectiva[18]

Em geral a palavra perspectiva tem o sentido de uma perspectiva linear, ou, mais precisamente, a ideia de usar a geometria para construir imagens obtidas por uma projeção central. É claro que essa simples definição é bem arrumada para os leitores atuais, na verdade ao longo dos séculos esse entendimento teve outros significados. Segundo Poudra (1864), a ideia dos gregos era a de bem "ver" os objetos, ou seja, enxergar a verdade. E, neste caso, Poudra faz uma diferenciação entre uma perspectiva de um objeto e um desenho:

> Entre uma perspectiva e um desenho, há diferenças que nós devemos sinalizar: uma perspectiva é o resultado de uma operação inteiramente geométrica que exige que nós conheçamos não apenas as posições absolutas e relativas de todos os pontos do assunto entre eles, mas também suas relações de posição com o quadro de projeção e o ponto de vista. Desenhar, ao contrário, é representar um assunto que está diante dos olhos, ou que é apenas conhecido existir, por apenas o sentimento de aparência que ele deve ter. (POUDRA, 1864, p.98)[19]

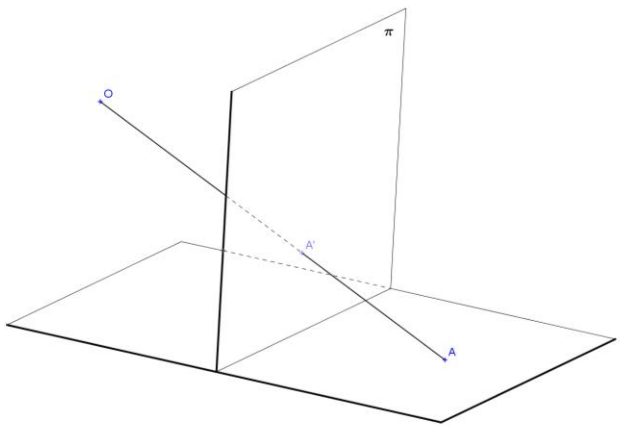
Léon-Baptiste Alberti (1414-?) em 1435, segundo Andersen (2008), é o primeiro a escrever sobre construção perspectiva, cuja obra de 1511 chega até nós, em seu Della

[18] Perspectiva é uma palavra do verbo latim *perspicere* que significa olhar através de, ver claramente.

[19] Entre une perspective et un dessin, il y a des différences que nous devons signaler : une perspective est le résultat d'une opération entièrement géométrique qui exige qu'on connaisse non-seulement les positions absolues et relatives de tous les points du sujet entre eux, mais aussi leurs relations de position avec le tableau et le point de vue. Dessiner, au contraire, est représenter un sujet qui est devant les yeux, ou qui est seulement conçu exister, par le seul sentiment de l'apparence qu'il doit avoir.

Pittura[20]. Neste trabalho Alberti introduz um modelo de representação perspectiva e algumas definições de geometria.

Figura 6: Projeção Perspectiva, modelo de Alberti



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Dado um plano π e um ponto O não pertencente à π, pode-se traçar uma reta que passando pelo ponto O e atravessando o plano π , seja incidente em um outro plano. Este processo é o que se denomina de perspectiva linear de uma projeção central. O ponto onde a reta incide neste novo plano tem sua imagem sobre o plano π, de tal forma que os três pontos são colineares, conforme a figura 6.

A ideia da perspectiva de um ponto, pode ser estendida a todos os pontos do plano. Assim, todos os pontos de um plano que, quando atravessado por um feixe de retas com origem em um ponto de projeção, geram imagens sobre um plano de projeção, de tal forma que os pontos correspondentes (os traços no plano atravessado e suas imagens no plano de projeção) estão em uma relação bijetiva. Essa ideia da bijeção encontraremos nos trabalhos de Geometria Descritiva de Monge (1748 -1818)[21] e em trabalhos sobre Geometria Projetiva. Observa-se, entretanto, uma sutil diferença: na Geometria Descritiva o ponto de projeção central está no infinito e na Geometria Projetiva o ponto de projeção central está a uma distância finita. Em resumo, temos um sistema de projeção cilíndrica e um sistema de projeção cônica.

Segundo Andersen (2008) se o modelo de perspectiva foi apresentado inicialmente por Alberti é somente Guido Ubaldi del Monte (...) que irá formalizar matematicamente esta relação em 1600 em seu livro *Perspectivae libri sex*. Poudra (1864) diz sobre Guido Ubaldi:

> Guido Ubaldi não é certamente o inventor desta ciência, mas, ele a tem reconstruído e estabelecido sobre bases geométricas fixas entre as quais

[20]Segundo Poudra (1864) o mais antigo autor conhecido de perspectiva foi Pietro Della Francesca (1390-?). Que adota a ideia de observar os objetos através de um plano de projeção transparente. Mas, sua obra é perdida.

[21]Gaspar Monge (1748-1818), matemático francês, principal responsável pela criação da *École Polytechnique* a qual tinha como principal disciplina a Geometria Descritiva, por ele desenvolvida.

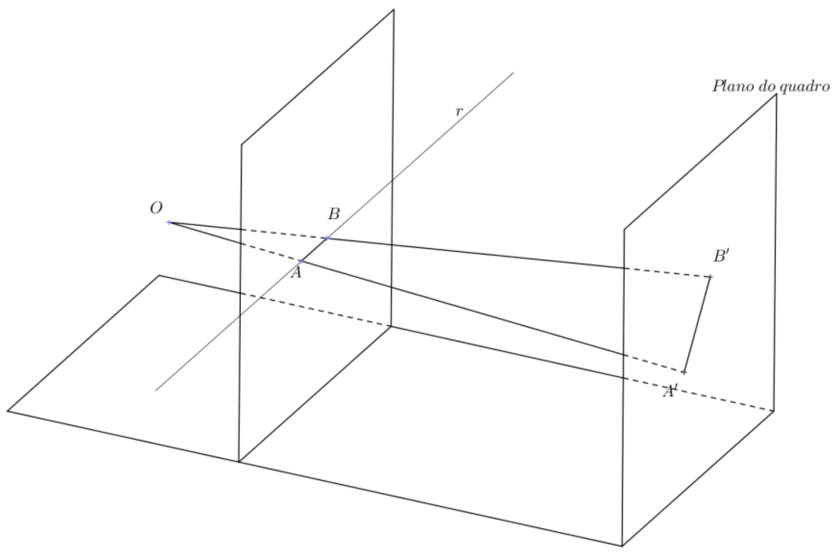
> nós encontramos, se não todos os métodos positivos, ao menos o germe de tudo que se foi feito desde então. (POUDRA, 1864, p.200) [22]

Um dos primeiros problemas de perspectiva interessante refere-se a como determinar a imagem de uma reta no espaço, paralela ao plano ao qual será projetada. Os argumentos de Guido Ubaldi são devidos aos Elementos de Euclides.[23]

Adaptamos a ideia de Guido Ubaldi: podemos imaginar um segmento AB contido em uma reta r, reta que por sua vez é paralela ao plano ao qual será projetada, ou seja, o plano que contém o quadro no qual buscamos sua imagem, e um ponto O não pertencente aos planos. Desta forma, teremos três elementos no espaço: o ponto O, um plano que contém a reta r e um plano que contém o quadro e é paralelo ao plano da reta r. Tendo como imagem de AB, no quadro, o segmento $A'B'$ e usando a ideia de que quando duas retas OA e OB são intersectadas por planos paralelos, determinarão segmentos de uma mesma razão. Do ponto O podemos traçar duas semirretas OA e OB, que determinarão os segmentos proporcionais $OA':A'A = OB':B'B$, Guido Ubaldi, então, conclui que os segmentos $A'B'$ e AB são paralelos. Deste raciocínio Guido Ubaldi apresenta um Lema:

> Se uma reta dada é paralela ao plano de projeção e tal que ela seja dividida em partes quaisquer, sua perspectiva será paralela e dividida em partes respectivamente proporcionais. (POUDRA, 1864, p.212)[24]

Figura 7: Projeção de uma reta paralela ao quadro



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Mais tarde, ‘sGravesande[25] (1688 - 1742) dará uma prova muito mais elegante e

[22] Guido Ubaldi n'est certainement pas l'inventeur de cette science, mais il l'a reconstruite et établie sur des bases géométriques fixes parmi lesquelles on retrouve, sinon toutes les méthodes positives, au moins le germe de tout ce qui s'est fait depuis.

[23] Traité d'Optique.

[24] Si une droite donnée est parallèle au tableau et qu'elle soit divisée en parties quelconques, sa perspective sera parallèle et divisée en parties respectivement proportionnelles.

[25] Willem Jacob ‘sGravesande professor de matemática e astronomia na Universidade de Leiden, Países Baixos.

simples, utilizando a *reductio ad absurdum*, que aqui adaptamos sua solução:

Imaginemos que a reta r, definida pelos pontos A e B paralela ao plano do quadro, possui uma imagem $A'B'$, no quadro. ‘sGravesande assume, por absurdo, que $A'B'$ não é paralela à AB, entretanto, as retas definidas pelos pontos A', B' e A, B são coplanares, ou seja, estão contidas no plano definido pelo ponto O e pela reta r. Desta forma, as retas $A'B'$ e AB intersectam-se em um ponto C, mas como a reta $A'B'$ é contida no plano do quadro o ponto C pertence a este plano e como também pertence à reta AB, conclui-se que AB intersecta o plano do quadro no ponto C. Tal solução é um absurdo, pois nossa premissa inicial era a de que a reta AB era paralela ao plano do quadro e, portanto, não poderia ter um ponto de intersecção a uma distância finita.

Sobre ‘sGravesande comenta Poudra:

> A obra de ‘sGravesande sobre a perspectiva é a mais científica das que foram compostas sobre esta ciência. Convém por consequência mais vantagens aos geômetras do que aos artistas. (POUDRA, 1864, p.497)[26]

Outro geômetra que discorre sobre perspectiva e que Poudra cita como de extrema importância é Lacaille (1713 - 1762)[27]. Poudra nos diz que a obra de Lacaille foi adotada na *École Polytechnique*:

> Parece que fazia parte das obras adotadas para o ensino da *École Polytechnique* a época de sua fundação, pois que se encontram notas de bons estudantes sobre à obra, acrescido ao tratado de óptica. (POUDRA, 1864, p.497)[28]

Esta citação precedente nos sinaliza que há uma possível intersecção da Perspectiva com a Geometria Descritiva na *École Polytechnique* e, portanto, nos parece interessante e intuitivo pensar que Poncelet, um ex-aluno recém egresso e que forçosamente é colocado no “isolamento”, ao ser cativo na cidade de Saratoff, tenha na gênese de suas reflexões, ao elaborar seus manuscritos de Saratoff, as ideias que circulavam na École Polytechnique. No prefácio da obra de 1862 fica claro as <u>influências diretas</u> que vieram as suas lembranças quando escrevia tais manuscritos.

> Reduzido as suas lembranças ao Liceu de Metz e da *École Polytechnique*, onde ele havia cultivado com predileção as obras de Monge, Carnot e Brianchon, devemos reconhecer que ele não poderia saber das últimas publicações antes da sua reentrada na França em setembro de 1814. Estas circunstâncias e seu extremo isolamento na cidade de Saratoff explicam como ele conduziu a tomada, uma a uma, as matérias de seus antigos estudos matemáticos [...]. (PONCELET, 1862, p. ix)[29]

---

[26] L'ouvrage du M. Gravesande sur la perspective est le plus scientifique de ceux qui ont été composés sur cette science. Il convient par conséquent davantage aux géomètres qu'aux artistes

[27] Nicolas Louis de Lacaille escreveu *Leçons élémentaires d’optiques* (1756).

[28] Il paraît qu'il faisait partie de ceux adoptés pour l'enseignement à l'École polytechnique à sa fondation, puisqu'on y trouve des notes de bons élèves, ajoutées au traité d'optique.

[29] Réduit à ses souvenirs du lycée de Metz et de l'École polytechnique, où il avait cultivé avec prédilection les ouvrages de Monge, de Carnot et de Brianchon, on doit reconnaitre qu'il n'a rien pu emprunter aux derniers écrits publiés avant sa rentrée en France, en septembre 1814. Ces circonstances et son extrême isolement dans la ville de Saratoff expliquent comment il fut conduit à reprendre, une à une, les matières de ses anciennes études mathématiques [...].

Contudo, nossa tese é de que para desenvolver a ideias que trariam à tona uma nova geometria, Poncelet utilizou-se de um arcabouço de ideias que complementariam as informações trazidas em sua memória, oriundas dos trabalhos de Monge, Carnot e Brianchon, citados por ele como suas influências diretas. Assim, nos parece intuitivo pensar que houve também influências indiretas, consideradas por Poncelet, trazidas, assim pensamos, pelo tratado de óptica e pelos trabalhos de Lacaille sobre Perspectiva.

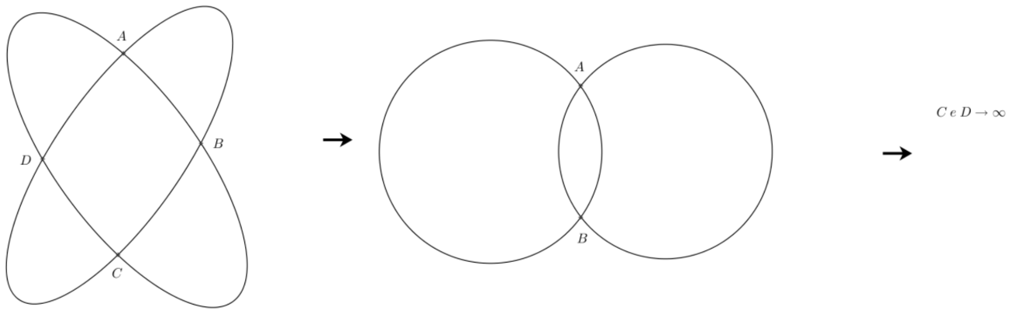
Nos tratados de Perspectiva observamos o conceito de ponto de fuga, ou seja, a reta do horizonte contém os pontos ao infinito. Isto nos parece similar ao conceito do acréscimo dos pontos do infinito ao plano euclidiano, transformando-o em um plano projetivo. Nos trabalhos de Desargues, observamos o tratamento natural dos pontos ao infinito, sendo, portanto, mais um conceito de suma importância na Geometria Projetiva. Nos trabalhos de Guido Ubaldi surge o processo de rebatimento, que nada mais é do que projetar uma figura do espaço em um plano de interesse. Esta ideia, de rebatimento, encontramos na obra de Monge sobre Geometria Descritiva. Desta forma, as ideias de projeção, pontos ao infinito e rebatimento não são estranhas aos geômetras do início do século dezenove. Os trabalhos de Carnot sobre transversais é um belo exemplo de razões cruzadas. A obra de Poncelet se torna um marco porque sistematiza todo esse conhecimento, acrescido dos Princípios de Projeção e dos Princípios de Continuidade. O primeiro (princípio da Projeção) permite trabalhar com figuras mais simples, por exemplo, para resolver problemas em uma elipse, bastaria resolvê-los em uma circunferência de círculo. O segundo permite trabalhar com as figuras, mesmo quando não são reais, isto significa que há uma permanência das propriedades mesmo quando se tornam imaginárias, é a ideia de continuidade.

Podemos observar como é bem intuitiva a ideia de Poncelet, em um exemplo sobre pontos cíclicos. Ele afirma que toda circunferência de círculo, no plano projetivo, passa por dois pontos imaginários ao infinito, os chamados pontos cíclicos. Sua afirmação parte da seguinte ideia: O teorema de Bézout[30] diz que duas curvas projetivas planas e coplanares de grau m e n possuem $m.n$ intersecções contadas com multiplicidade apropriada. Como as circunferências de círculos são de grau 2 é de se esperar quatro pontos de intersecção. Assim, continua Poncelet, imagine duas elipses se intersectando em 4 pontos, conforme a figura 8. Pelo Princípio de Projeção poderemos transformá-las em duas circunferências de círculos que possuem dois pontos de intersecção reais ou imaginários a uma distância finita e os dois outros pontos imaginários ao infinito. Estes últimos são os pontos cíclicos[31]. O Princípio de Continuidade é que sustenta a afirmação de Poncelet e o permite dizer que há permanência das propriedades e, portanto, continua valendo às circunferências de círculo as mesmas propriedades de que gozavam as elipses, ou seja, o que o teorema de Bézout apresenta algebricamente, Poncelet dá sentido geometricamente.

[30] Étienne Bézout (1730-1783) matemático francês que apresenta suas ideias em *Théorie générale des équations algébriques.*

[31] Em nota de fim, acrescentamos uma explicação analítica sobre pontos cíclicos retirada do meu artigo na revista LLULL: OS PONTOS IMAGINÁRIOS NAS OBRAS DE PONCELET, CHASLES E LAGUERRE.

Figura 8: Princípios de Projetividade e Continuidade



Fonte: Elaborado pelos Autores.

Considerações Finais

Poncelet sistematizou o emprego da projeção central e da continuidade, sendo o primeiro a considerar, sob este aspecto, a Geometria como um ramo autônomo, com métodos próprios, resultados próprios e objetivos bem definidos. Mais tarde, esta Geometria sistematizada por Poncelet, com o marco definido pelo seu tratado de 1822, receberia a classificação de Geometria Projetiva. Entretanto, não era esse o objetivo de Poncelet, ou seja, não nos parece que tivesse a intenção de demarcar um novo ramo da Geometria, apenas tinha a intenção de dotar a Geometria Sintética de artifícios das quais gozavam a Geometria Analítica e, ao fazer isso, baseou-se nos Princípios de Projeção e de Continuidade.

A ideia de uma projeção central não era desconhecida dos matemáticos, engenheiros, arquitetos, artistas renascentistas. No século quinze, por exemplo, os pintores renascentistas usavam a ideia de uma perspectiva em suas obras para representar com mais realidade um mundo tridimensional em um quadro bidimensional, como falamos neste trabalho. Para tanto, referiam-se aos pontos de fuga, onde as retas paralelas se encontram dando uma ideia mais realista das obras. O que é original em Poncelet é o Princípio da Projeção Central que permite, segundo Desargues, trabalhar com uma circunferência de círculo para resolver problemas de uma cônica qualquer, e pensar que essa transição é contínua, ou seja, há um Princípio de Continuidade que irá permitir o entendimento da permanência das propriedades de uma figura, mesmo que ela não possa mais ser vista após uma transformação projetiva. A questão entre os matemáticos passou a ser quais seriam as invariantes em Grupos de Transformações, o que conduziu a um melhor entendimento das novas Geometrias. E, a partir da classificação por Grupos de Transformações, foi possível verificar que a Geometria Projetiva é a mais fundamental das Geometrias, ou seja, é a base das Geometrias Euclidianas e não-euclidianas. É dentro desta percepção que o tratado de 1822 é um marco historiográfico da Geometria Projetiva. A inovação de Poncelet é associar o Princípio da Projeção Central ao Princípio de Continuidade, considerando as propriedades das figuras e suas relações no espaço. Taton (1951, p.2)[32] irá fazer a seguinte afirmação ao se referir ao *Traité des propriétés projectives des figures* de 1822: "Verdadeiro ponto de partida da reconstrução do edifício geométrico do século dezenove realizado de maneira notável."

Aplicando o Princípio de Projeção podemos passar de uma figura a outra, como dissemos anteriormente neste trabalho, ou seja, podemos, por exemplo, trabalhar em uma circunferência de círculo para obter soluções de uma cônica qualquer e, em seguida, por uma

[32] Taton, René. Conférence faite au Palais de la découverte le 17 février 1951. Université de Paris, 1951.

transformação geométrica, retornarmos à cônica. No entanto, com este procedimento podemos conduzir alguns elementos geométricos, ou todos, ao infinito. Desta forma, podemos olhar o trabalho de Desargues ao introduzir o ponto ao infinito, tratando retas paralelas como concorrentes ao infinito. Já em Monge que diz, por exemplo, que tangentes às circunferências de círculo de pontos interiores à curva são imaginárias, podemos extrair a ideia de imaginários em geometria. As ideias de Desargues, sobre ponto ao infinito, a ideia de Monge, sobre pontos imaginários, são ideias que serão tratadas por Poncelet com o Princípio de Continuidade.

Na verdade, pensamos que os dois Princípios que regem o raciocínio de Poncelet, são intimamente entrelaçados. Se o Princípio de Projeção Central permite, de um ponto, conduzir uma figura em um movimento "contínuo" fazendo-a variar em um plano até poder ser não mais vista, por outro lado, é o Princípio de Continuidade que irá permitir justificar, para Poncelet, a permanência das propriedades de seus elementos, mesmo esses elementos sendo conduzidos ao infinito ou tornando-se imaginários. É este princípio, da permanência das propriedades, que Poncelet irá denotá-la por Princípio de Continuidade, que irá utilizar ora para simplificar seus procedimentos, ora para interpretar seus resultados. A ideia do Princípio de Continuidade é questionada, em 1820, quando Poncelet a submete à análise da *Académie des Sciences* de Paris. No relatório da *Académie des Sciences* de Paris fica expresso que há ausência de fundamentos lógicos e que parece que este princípio é na verdade uma forte indução. Entretanto, é com este princípio que Poncelet irá considerar os elementos geométricos em seus trabalhos, dando uma sustentação aos elementos ao infinito e aos elementos imaginários. Os pontos cíclicos[ii], por exemplo, são resultados deste seu raciocínio.

Referências

ANDERSEN, Kirsti. **The geometry of an art: the history of the mathematical theory of perspective from Alberti to Monge**. Springer Science & Business Media, 2008.

BÉZOUT, Etienne. **Théorie générale des équations algébriques**. Ph.-D. Pierres, 1779.

BICUDO, Irineu et al. **Os elementos**. Unesp, 2009.

BICUDO, Irineu. Platão e a Matemática. **Letras clássicas**, n. 2, p. 301-315, 1998.

BRIANCHON, Charles Julien. **Mémoire sur les surfaces courbes du second degré**. 1806.

CARNOT, Lazare. **Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace : suivi d'un Essai sur la théorie des transversales**. Courcier, 1806.

DE SOUSA, Giselle Costa; DE OLIVEIRA, José Damião Souza. Geometria do compasso de Mascheroni em atividades com software de matemática dinâmica. **Revista BoEM**, v. 6, n. 11, p. 58-77, 2018.

DESARGUES, Girard ; BOSSE, Abraham. **Oeuvres de Desargues : réunies et analysées**. Leiber, 1864.

FITZPATRICK, Richard. **Euclid's elements of geometry**. 2008.

HEFEZ, Àbramo. Uma Introdução a História da Geometria Projetiva. **Notas de uma palestra proferida na reunião regional da SBM. Vitória, ES**, 1985.

MONGE, Gaspard. **Géométrie descriptive : leçons données aux écoles normales, l'an 3 de la République**. Baudouin, Imprimeur du Corps législatif et de l'Institut national, 1798.

PONCELET, J.-V. **Traité des propriétés projectives des figures**, Paris : Bachelier, 1822. 500p.

PONCELET, M. GÉOMÉTRIE DES COURBES. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées**. 1820. p. 69-83.

PONCELET, M. PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE. In: **Annales de mathématiques pures et appliquées**. 1817. p. 141-155.

POUDRA, Noël Germinal. **Histoire de la perspective, ancienne et moderne : contenant l'analyse d'un très-grand nombre d'ouvrages sur la perspective et la description des procédés divers qu'on y trouve**. Corréard, 1864.

TATON, René. **La géométrie projective en France de Desargues à Poncelet : conférence faite au Palais de la découverte le 17 février 1951**. Université de Paris, 1951.

- [i] Axioma 1: Coisas que são iguais a uma mesma coisa, são iguais entre si.
- Axioma 2: Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
- Axioma 3: Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Axioma 4: Coisas que coincidem uma com a outra, são iguais.
- Axioma 5: O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Os postulados:

- Postulado 1: Dados dois pontos distintos, há um único segmento de reta que os une;
- Postulado 2: Um segmento de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta;
- Postulado 3: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência de centro naquele ponto e com raio igual à distância dada;
- Postulado 4: Todos os ângulos retos são congruentes (semelhantes);
- Postulado 5: Se duas linhas intersectam uma terceira linha de tal forma que a soma dos ângulos internos em um lado é menor que dois ângulos retos, então as duas linhas devem se intersectar neste lado se forem estendidas indefinidamente. (Postulado de Euclides ou Postulado das Paralelas).

Euclides fez algumas definições para que a geometria tivesse sentido e pudesse provar suas proposições. No total foram 23 definições:

- 1)Ponto é aquilo de que nada é parte;
- 2)linha é comprimento sem largura;
- 3)extremidades de uma linha são pontos;
- 4)linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma;
- 5)superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura;
- 6)os lados de uma superfície são linhas;
- 7)Superfície plana é a que está posta por igual com retas sobre si mesma;
- 8)ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta;
- 9)quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado de retilíneo;
- 10)quando uma reta, tendo sido alterada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alterou é chamada uma perpendicular àquele sobre a que se alterou;
- 11)ângulo obtuso é o maior do que um reto;
- 12)agudo, o menor que um reto;
- 13)fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa;
- 14)Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras;
- 15)Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação a qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto no interior da figura, são iguais entre si;
- 16)o ponto é chamado de centro do círculo;
- 17)diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois;

- 18)semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo;
- 19)Figuras retilíneas são as contidas por retas. Triláteras, as contidas por três, e, por outro lado, quadriláteras, as contidas por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas;
- 20)das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem três lados desiguais;
- 21)ainda das figuras triláteras, por um triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem três ângulos agudos;
- 22)das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, e que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e romboide, a que tem tantos os lados opostos quantos os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios;
- 23)Paralelas são retas que, estão no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

[ii] Para que o leitor tenha um ponto de vista comparativo vamos abordar os pontos cíclicos, que Poncelet apresentou de forma sintética, usando as ideias analíticas de Plucker. A proposta, deste trabalho, foi de apresentar este artigo sob uma ótica sintética, entretanto, julgamos ser interessante, após sugestão do avaliador, apresentar um pequeno resumo analítico do matemático alemão, Julius Plucker.

Plucker dá uma nova abordagem à Geometria de Descartes, acrescentando ao plano euclidiano os pontos ao infinito que será denotado por plano projetivo. E além disso, acrescentando coordenadas complexas teremos o plano projetivo complexo. Assim, todas as retas deste plano são classes de retas complexas passando pela origem, podemos imaginar, dado o plano projetivo complexo (x,y,1) com x e y pertencentes aos complexos, que todas as retas terão um representante neste plano, sendo as classes de retas que contêm os pontos (x,y,0) os pontos ao infinito. Como os pontos deste plano são retas do espaço complexo passando pela origem, as figuras deste plano correspondem às superfícies cônicas no espaço complexo. Observe o leitor que a passagem do espaço complexo ao plano complexo decresce de uma dimensão e, portanto, é razoável pensar que as curvas no plano projetivo complexo são decorrentes de superfícies cônicas com vértices na origem. Assim, uma reta no plano projetivo corresponde a um plano no espaço que passa pela origem.

Munido desta ideia vamos apresentar os pontos cíclicos de forma analítica. Uma circunferência de círculo no plano complexo se escreve como:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

E no plano projetivo complexo podemos escrever:

$$(\frac{X}{Z}-a)^2+(\frac{Y}{Z}-b)^2=r^2$$

Reescrevendo esta equação,

$$(X-aZ)^2+(Y-bZ)^2=Z^2r^2$$

Como buscamos os pontos cíclicos, ou seja, os pontos ao infinito pelos quais todas as circunferências de círculos, no plano projetivo, passam, devemos fazer $Z=0$ na equação precedente. Teremos então, $X^2+Y^2=0$. Fatorando esta equação vamos determinar duas retas complexas $(Y-iX)(Y+iX)=0.$ Que nos conduzem ao sistema

$$\begin{cases} Y = iX \\ Y = -iX \end{cases}$$

São as denominadas retas isotrópicas. Deste sistema obtemos os pontos $I = (1, i, 0)$ e $J = (1, -i, 0)$, que são os pontos de intersecção de todas as circunferências de círculos as quais se refere Poncelet:

> Círculos colocados arbitrariamente em um plano não são, portanto, completamente independentes um do outro, como se pode pensar à primeira vista; idealmente, eles têm dois pontos imaginários comuns ao infinito e, a esse respeito, devem gozar de certas propriedades pertencentes ao mesmo tempo a todo o sistema e análogas às de que gozam quando possuem um secante comum; por exemplo, as tangentes de qualquer ponto da secante comum ao infinito são iguais entre si e as cordas de contato ou polares correspondente são paralelas ou concorrem reciprocamente em outro ponto da secante em questão [Poncelet, 1822, p.49].

Ou seja, como Poncelet afirma pelo Princípio de Projeção todas as cônicas podem ser transformadas em uma circunferência de círculo, se imaginarmos duas elipses, conforme figura 8 desse artigo, por exemplo, intersectando-se em quatro pontos e, pelo princípio de projeção, transformá-las em duas circunferências secantes, poderemos identificar seus quatro pontos de intersecção, dois reais e os outros dois imaginários complexos que são os pontos cíclicos.

É brilhante ver que Poncelet intuiu sobre os pontos cíclicos sem ter ferramentas matemáticas que pudessem tratar os pontos imaginários ao infinito tais como as coordenadas homogêneas.