

UMA BUSCA DE ANALOGIAS ENTRE AS REPRESENTAÇÕES MENTAIS E AS REPRESENTAÇÕES NO ESPAÇO BI-DIMENSIONAL DOS MODELOS GEOMÉTRICOS

Iolanda Andrade Campos Almeida¹

Josenildo dos Santos²

Cleide Farias de Medeiros³

ALMEIDA, I. A. C.; SANTOS, J.; MEDEIROS, C. F. *Em busca de analogias entre as representações mentais e as representações no espaço bi-dimensional dos modelos geométricos*. Revista Educação Gráfica, Bauru, n.4, p.31-41, 2000.

Resumo

Muitas das dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos estudantes decorrem das suas concepções alternativas, comumente inadequadas, que os induzem a não aceitarem estruturas diferentes das por eles conhecidas. No campo das atividades de representação gráfica há a utilização de transformações que em graus diferentes aproximam-se ou afastam-se do objeto representado. Isso traz dificuldades na visualização espacial. Vislumbrando-se a importância que os modelos mentais alternativos dos aprendizes podem ter para a prática educacional, buscou-se, nesse estudo, compreender e estabelecer uma possível analogia existente entre as transformações ocorridas nos modelos geométricos (geometrias e formas de representação gráfica) e a formação dos

¹ MSc. Em Educação Matemática, UFPE, e-mail: iolanda@interway.com.br

² PhD em Topologia Algébrica, UFPE, Mestrado em Educação nas Ciências – UFRPE, e-mail: j.d.santos@uol.com.br

³ PhD em Educação Matemática, Mestrado em Educação nas Ciências – UFRPE, e-mail: cfmed@hotlink.com.br

modelos mentais no ser humano. Buscou-se, a nível metodológico, compreender-se como processam-se as transformações nesses dois campos para, a seguir, estabelecerem-se comparações nos seus procedimentos. Concluiu-se que é importante entenderem-se os processos de transformação com os invariantes mantidos por cada transformação para que se possa entender os modelos mentais dos estudantes e apontarem-se os caminhos para que eles atinjam os modelos teóricos do paradigma geométrico.

Palavras-chave: transformações geométricas, invariantes, sistemas de representação, percepção espacial.

Abstract

Many learning difficulties faced by students stem from their alternative conceptions, usually inadequate ones, which lead them to the non-acceptance of different structures other than those they deal with. In the field of graphical representation activities there is utilization of transformations whose extent to which they relate to the represented object is varied. This brings difficulties to the spatial perception. Bearing in mind the importance that the learners' alternative mental models may have to the educational practice, this study aimed for understanding and establishing a possible existing analogy between the transformations that occur on the sphere of geometrical models (geometries and forms of graphical representation) and the constitution of human mental models. Methodologically, it was searched for comprehending how the transformations in these two fields are developed to, next, establish comparisons among their procedures. The conclusion is that it is important to understand the processes of

transformation with the invariants held by each transformation in order to understand the students' mental models indicating the ways for them mastering the theoretical models of the geometry paradigm.

Keywords: Geometrical transformations, invariants, representation systems, spatial perception.

1. Introdução

As investigações sobre o ensino, em qualquer que seja a área de interesse, sempre objetivam uma aprendizagem efetiva por parte do aprendiz. Teóricos da educação ou do desenvolvimento cognitivo vêm desenvolvendo estudos visando entenderem como o indivíduo aprende e como essa aprendizagem pode vir a ser facilitada para promover a geração de conhecimentos e, conseqüentemente, o progresso do ser humano. Atualmente, o termo 'aprendizagem significativa' proposto por 'Ausubel' (1978, 1964) é o que tem sido utilizado para designar essa aprendizagem almejada.

O conceito de 'aprendizagem significativa', é enfocado de diferentes formas pelos estudiosos, havendo, no entanto, uma compatibilidade de seu significado entre os teóricos da educação (Moreira, Caballero e Rodriguez, 1997). Esses últimos autores apontam alguns elementos que na visão de alguns estudiosos servem de âncora ou apoio no desenvolver da aprendizagem, a saber: os 'subsunçores' para Ausubel; a 'assimilação' para Piaget; a 'internalização de instrumentos e signos' para Vygotsky; os 'construtos pessoais' para Kelly e os 'modelos mentais' para Johnson-Laird.

Muitos fatores interferem na aprendizagem e dentre eles pode ser destacada a forma como o indivíduo

processa e organiza em seu cérebro as informações que lhes são apresentadas, ou seja, as suas representações internas ou representações mentais. Esse processo é por demais complexo porque o homem não se limita, apenas, a receber as informações e a armazená-las; ele as transforma criando os seus modelos mentais.

Muitas metáforas da mente humana já foram feitas por diversos estudiosos para poderem melhor entender a sua capacidade intelectual e como ela funciona. Os 'comportamentalistas' encaram a mente como uma 'caixa preta' que não permite um estudo objetivo do que ocorre no seu interior. Em contrapartida a essa visão, a psicologia cognitiva surgiu há algumas décadas com o objetivo de tornar a psicologia uma ciência também objetiva, mas entendendo ser possível compreender o que ocorre na 'caixa preta'. Em uma das visões atuais da psicologia, juntamente com outras áreas do conhecimento, defende-se que se pode estabelecer uma analogia entre a mente humana e um computador, uma vez que se entende a mente como um sistema simbólico, que processa informações de forma análoga ao computador (Grecu, 1999). Numa visão ausubeliana, tal analogia não parece apresentar um firme suporte visto que o "*equipamento, cognitivo humano, diferentemente de um computador, não está apto a lidar eficientemente com a informação adquirida automaticamente, somente algumas tarefas de aprendizagem relativamente simples podem ser internalizadas dessa forma*" (Ausubel, 1978, p. 38).

Esse processo de armazenamento de informações envolve e implica em um sistema de representação, sistema este que utiliza regras de representação onde as informações são codificadas e decodificadas em uma determinada linguagem de modo

que o indivíduo possa (i) extrair das informações, armazenadas em sua mente, dados qualitativos e quantitativos; (ii) relacionar, interagir e transformar as informações e os dados com os já existentes em sua mente e com outros novos que lhe são apresentados.

A criança no seu desenvolvimento cognitivo bem inicial (fase pré-escolar) aprende por descoberta, fazendo amplo uso dos sentidos e envolvendo avaliações e posteriores generalizações de experiências vivenciadas. De posse de um certo número de conceitos, a criança começa a utilizá-los para aprender através da recepção. Tal recepção pode tornar-se significativa dependendo tanto da plausibilidade do conhecimento apresentado e da interação que possa vir a ocorrer entre os novos conhecimentos e os anteriormente obtidos (Ausubel, 1978).

As interferências e ruídos existentes na comunicação entre o mundo externo e o interno do indivíduo podem provocar distorções nos modelos mentais formados e os indivíduos, por vezes, formam concepções sobre algo com significados contextualmente errôneos, os quais estão em desacordo com as teorias científicas. Essas concepções não compartilhadas com a comunidade científica têm sido chamadas de 'concepções alternativas' (CAs). Vários autores, por exemplo Silveira (1996) aponta que "*a existência de CAs mostra que os alunos são construtores de idéias que objetivam dar conta do mundo, da realidade*" (p. 228) e que estas têm como característica serem resistentes à mudança; ocorrendo muitas vezes do aluno passar pela escola e não mudar as suas concepções errôneas.

Conhecerem-se essas 'CAs' é um passo inicial para entenderem-se as dificuldades dos alunos em sala de aula e

para formularem-se estratégias que ponham em cheque as posições anteriores, preparando, assim, condições para que o aluno aceite novos modelos.

O objetivo deste presente trabalho é o de apresentar elementos para o estabelecimento de uma analogia entre os procedimentos utilizados pela mente humana na formação de modelos mentais e aqueles procedimentos utilizados pela geometria para representar seus modelos. É aqui suposto que esta analogia contribuiria para a compreensão de certas concepções alternativas formuladas pelos alunos que comumente prejudicam a visualização espacial na representação bi-dimensional das formas geométricas.

No desenvolvimento deste trabalho adotou-se uma metodologia em que foram colocadas em evidência as analogias existentes entre as representações geométricas e as representações utilizadas pela mente. Foi focalizado, primeiro, o aspecto de invariância, isto é, a permanência daqueles atributos do objeto representado que se mantêm na sua representação e, segundo, aquele princípio que é utilizado para representar graficamente no espaço bi-dimensional os modelos tri-dimensionais.

2. Procedimentos Subjacentes à Formação de Modelos nas Geometrias

Por mais de dois milênios, os 'Elementos de Euclides' resistiram a todos os desafios, despontando como suprema conquista da 'Matemática'. Os padrões de rigor adotados por Euclides foram considerados como os melhores possíveis e o caráter concludente das demonstrações parecia insuperável. Lentamente, porém, cresceu o número de pequenos critérios. Durante o século XIX, os padrões de rigor matemático tornaram-se muito mais elevados e percebeu-se que o

trabalho de Euclides, embora admirável, era, de fato, defeituoso do ponto de vista lógico. Isto despertou o interesse de grandes matemáticos a trabalharem na 'modernização' da 'Geometria Euclidiana'. Além disso, surgiram também as 'Geometrias não Euclidianas'.

Na verdade, as geometrias podem ser entendidas de duas maneiras:

(i) Geometria Pura ou Geometria não Interpretada – entende-se por 'geometria não interpretada' o estudo que envolve o conhecimento analítico puro, pois consideram-se apenas questões de lógica pura – o que decorre do que. O conhecimento que aí se exhibe é um conhecimento acerca de dedutividade lógica, assentado em considerações a respeito da lógica formal.

(ii) Geometria Aplicada ou Geometria Interpretada – esta deve ser entendida como interessada em hipóteses acerca da natureza, hipóteses que podem ou não serem verdadeiras. Segundo esse modo de entender, ao atribuírem-se significados específicos aos termos primitivos, passa-se da geometria 'não-interpretada' para a 'geometria interpretada', transformando-se, assim, de modo inevitável, as sentenças da geometria em hipóteses empíricas acerca do mundo. Neste caso, a única maneira de decidir-se sobre a verdade ou a falsidade de tais hipóteses consiste em agir-se indutivamente, apelando-se para a observação e a experimentação.

3. Procedimentos Subjacentes à Utilização de Modelos de Representação Gráfica

A representação de formas tri-dimensionais no espaço bi-dimensional processa-se através da projeção do objeto a partir de um ponto próprio ou impróprio em um plano. Dependendo da posição do

objeto, a ser representado, em relação ao plano de projeção, da posição do centro de projeção e de parâmetros utilizados para a individualização da posição do objeto no espaço, têm-se os diferentes sistemas de representação. Para que estas formas tridimensionais possam vir a serem representadas graficamente, elas são traduzidas segundo um modelo matemático, sendo, então, constituídas de pontos, linhas e figuras geométricas.

Os sistemas de representação caracterizam-se, ainda, por viabilizarem na própria representação a obtenção das propriedades geométricas do objeto no espaço bem como dados qualitativos e quantitativos do mesmo. Conforme utilizem projeções cilíndricas (ortogonais ou oblíquas) ou cônicas, estes sistemas de representação podem apresentar uma imagem mais ou menos semelhante com a que se apresenta à vista, ou seja, em perspectiva. Quando um objeto está com uma representação em perspectiva, tem-se uma percepção das suas três dimensões.

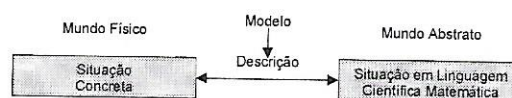
Dentre os sistemas, aqueles que apresentam uma imagem em perspectiva como a 'cavaleira', a 'axonometria' e a 'cônica' permitem que o observador tenha uma maior facilidade em perceber como é a forma espacialmente porque existe uma similaridade entre os modelos, isto é, entre o modelo real, o modelo representado e o modelo mental. Os outros sistemas, o 'mongeano' e o 'cotado', devido à forma como são estruturados, exibem o objeto representado em projeções que não apresentam volumetria. O sistema mongeano baseia-se em projeções em dois planos distintos apresentadas em um único plano.

Com ou sem imagem em perspectiva, que facilitem a identificação do modelo real, os sistemas de representação necessitam de

todo um aparato teórico para a representação dos objetos incluindo, ainda, o domínio de procedimentos para a determinação do objeto representado através do desenho no papel permitindo-se o poder construí-lo tridimensionalmente com todos os dados obtidos na própria representação.

4. Modelos Matemáticos

Um Modelo matemático é a descrição em linguagem científica de uma situação concreta ou abstrata que envolve fatos relacionados com o mundo real ou aspecto puramente teórico (fig. 1).



---Figura 1

As representações espaciais que todos têm em seu contato com o mundo real (físico) são descritas, em linguagem matemática, pelas geometrias euclidiana ou não-euclidianas. De fato à luz da 'mundividência' resultante da 'física newtoniana clássica', a 'geometria euclidiana' é, portanto, um modelo matemático do mundo físico. Por outro lado, na ótica da teoria da 'relatividade de Einstein', a 'geometria riemaniana' é, de fato, um modelo matemático do mundo físico 'einsteiniano'.

De acordo com certas escolas filosóficas, as figuras (ou imagens) representadas em um 'espaço' através de qualquer processo são representações de conjuntos de idéias elaboradas pelos matemáticos ou leigos, embora essas idéias não possam ser tidas como um mero produto da razão humana, independentemente da realidade concreta. O ponto, por exemplo,

não tem dimensão e qualquer representação gráfica desse elemento não corresponderá à sua verdadeira concepção, uma vez que para representá-lo utilizam-se símbolos (signos arbitrários) que são constituídos de dimensão.

Apesar de só se poder obterem-se modelos aproximados das formas geométricas puras, as construções desses modelos tomam como base justificativas de uma geometria. Fazendo-se uma retrospectiva histórica do desenvolvimento da matemática e da construção dos seus modelos, constata-se que o conhecimento foi construído baseando-se em modelos concretos e que, posteriormente, foram utilizados para generalizações e abstrações. O estudo da representação desses modelos compete à geometria que se utiliza de regras de representação baseadas em axiomas ou postulados (Caraça, 1984).

Assim, tanto os modelos mentais como as representações concretas dos modelos matemáticos submetem-se a regras de representação e tais regras devem ser entendidas para que se possa ter isomorfismo entre o objeto e a sua imagem representada.

5. Transformações Geométricas e Topológicas

Tal como há constantes mutações nos mundos animal, vegetal e mineral que provocam evoluções, as transformações também são as principais fontes gerativas do conhecimento. De fato, o campo ou tipo de transformação corresponde à idéia de um espaço que, antes de ser ente matemático-científico, é uma imagem mental que depende da dimensão comportamental do homem (em particular do aluno). Além disso, as transformações para serem compreendidas, necessitam que se estabeleçam tanto o mecanismo

das transformações como prioritariamente o(s) invariante(s) de cada uma delas.

No estudo das transformações nas várias geometrias (euclidiana e não-euclidianas) encontra-se uma relação interessante dada pelo binômio 'espaço' X 'transformação': o espaço em cada uma delas e, conseqüentemente, a transformação (estrutura individualizadora operativa de cada espaço) acompanham a evolução cultural do homem nas suas diferentes fases temporais e nas mais diversas formações profissionais, tendo assim, uma influência crucial nos modelos matemáticos.

Tomando-se como base o domínio comportamental do aluno (o espaço vital), este depende diretamente da facilidade com que ele assimila, pratica e decide corretamente de acordo com um desses respectivos espaços.

Estes espaços não são totalmente distintos; eles, na verdade, guardam algumas propriedades de semelhança. O aluno da atualidade deixou de enfatizar o tradicional antagonismo entre os mesmos para acentuar fecundas analogias comportamentais, através de princípios topológicos da psicologia, repensáveis até mesmo pela descoberta da cibernética (Andrade, 1980). Graças a esta área de pesquisa, o homem acelera a conquista do ambicionado alargamento das fronteiras da automação que gradativamente mais amplia a qualidade de vida do homem contemporâneo.

O estudo a cada passo mais minucioso das transformações é uma imposição do desenvolvimento cultural da época atual, deixando de ser apenas uma diretriz didático-acadêmica indispensável ao ato da criação (ou do aprendizado) aplicada e aconselhável à manifestação plástica em geral (Idem., ibidem).

5.1 Transformação Euclidiana

As transformações euclidianas são aquelas que têm os fundamentos nas principais operações da geometria euclidiana: a rotação, a simetria e a translação que têm como cerne a invariância métrica e ângulos, distância, áreas, volumes e continuidade.

Por mais de dois milênios, as transformações euclidianas resistiram a todos os desafios, despontando como suprema conquista da matemática. Os padrões de rigor adotado por Euclides foram considerados como os melhores possíveis e o caráter contundente das demonstrações parecia insuperável. Porém, como foi abordado anteriormente, lentamente cresceu o número de pequenos critérios. Durante o século XIX, os padrões de rigor matemático tornaram-se muito mais elevados e percebeu-se que o trabalho de Euclides, embora admirável, era, de fato, defeituoso do ponto de vista lógico. Um exemplo desta falha está na demonstração da "Proposição I", do 'Livro I' de Euclides: Euclides usou apenas a lógica formal clássica (Santos, 2000).

Santos (2000) aponta, ainda, que a evolução histórica da matemática mostra que as transformações geométricas euclidianas no início do século XVIII já se encontravam suficientemente desenvolvidas e amadurecidas para presenciar o surgimento das transformações geométricas não-euclidianas, com a criação das geometrias não-euclidianas. Qualquer um dos muitos matemáticos que estiveram no limiar de descobrir, por exemplo, a 'geometria hiperbólica': Sachieri, Legendre, Lambert, Bolyai, Taurinus, Schweikant poderia tê-lo feito. É difícil encontrar, no âmbito da própria geometria, algumas razões para que esta descoberta não tenha

se dado na época desses matemáticos. Tudo parece indicar que foram constrangimentos externos à matemática que durante mais de um século inibiram o seu aparecimento.

A limitante indeformabilidade das figuras através das transformações euclidianas (fig. 02) motivou os pesquisadores em diversos lugares no mundo a estudarem os mais diferentes objetos mediante o fenômeno ótico (visão).

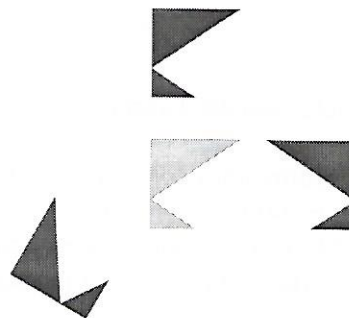


Fig. 02: Exemplo de diferentes transformações euclidianas sofridas por uma figura

5.2 Transformação Projetiva

A transformação projetiva inicia-se com Desargues (na Alemanha), Taylor (na Inglaterra) e Da Vinci (na Itália). Da Vinci, em pleno Renascimento, iniciava seus estudos sobre 'ver através de' a que denominou 'perspectiva'.

Neste caso, não se tratava de negar um postulado na 'geometria euclidiana', mas sim de interpretar as deformações de uma figura quando ela é substituída pelas imagens visuais ou até mesmo pelas suas sombras provocadas pela iluminação artificial ou natural.

As transformações projetivas têm como único invariante a bi-razão e/ou razão harmônica. A mecânica de translação, rotação, simetria, etc., é neste momento substituída pelas únicas operações projetivas

de cortar e projetar. Porém, a ordem e a continuidade, já respeitadas pelas transformações euclidianas, são mantidas pelas transformações projetivas (fig. 03).

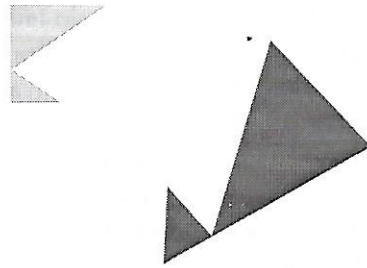


Fig. 03: Exemplo de uma transformação projetiva

5.3 Transformação Topológica

Transformações topológicas são aquelas que preservam 'proximidades', ou seja, transformam 'próximo' em 'próximos'. Isto é, uma figura (F1) é topologicamente equivalente à figura (F2), se e somente se uma pode ser transformada na outra sem cortar ou colar. Por exemplo, todas as figuras do grupo abaixo são topologicamente equivalentes (fig. 04).

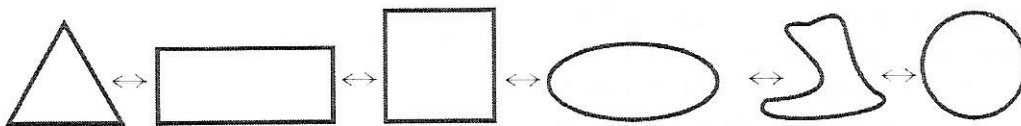


Fig. 04 Cada uma dessas figuras transforma-se em uma circunferência

Observa-se, também, que as transformações topológicas procuram explicar a complexidade de um 'espaço', isto é, se o espaço tem buracos ou torções ou é formada por ilhas. De fato, as transformações topológicas estão além das geométricas no sentido de generalidades, preserva a continuidade e são mais gerais que as euclidianas e projetivas. Em outros termos, os espaços euclidianos e projetivos são casos particulares dos espaços topológicos. Assim, os mecanismos de rotação, translação e reflexão do espaço euclidiano ou o cortar e o projetar da geometria projetiva são substituídos na ótica da topologia, pela noção de proximidades (vizinhança).

6. Os Sistemas de Representação: Modelo Matemático e Modelo Mental

No sentido geométrico, a representação de uma figura ou imagem qualquer exige construções que se fundamentam nas relações matemáticas do objeto. De uma forma análoga, isso também ocorre na mente, ou seja, a mente utiliza um sistema de notação e classificação que permite representar algo do mundo externo ou interno sem que este algo esteja presente.

Em se tratando da representação de formas tridimensionais no espaço bidimensional, a geometria utiliza sistemas de representação. Estes sistemas são procedimentos projetivos, os quais permitem através de

projeção e corte mostrar e resgatar, de uma representação, todos os dados qualitativos (que interessam) e quantitativos do objeto representado. Esses sistemas de representação caracterizam-se pelo tipo de projeção e pela posição do objeto em relação ao plano onde será projetado.

Tanto nas representações geométricas como nas mentais, ocorrem mudanças entre o como o objeto se apresenta na realidade e a sua imagem. Um cubo, por exemplo, na sua representação geométrica, pode apresentar configurações distintas (fig. 05) e todas elas representam este mesmo objeto. No entanto, podem ocorrer representações que exigem um grau maior de conhecimentos dos sistemas de representação para que seja possível a correta decodificação da forma representada (fig.06).

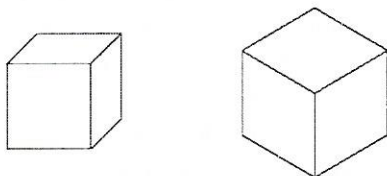


Fig. 05 Os dois desenhos representam um cubo. O primeiro corresponde à 'perspectiva cavaleira' e o segundo a uma 'perspectiva isométrica'. As figuras geométricas que constituem as duas representações utilizam-se de polígonos diferentes, até mesmo daqueles que formam a face do sólido real e, no entanto, são entendidas como sendo representações de um cubo

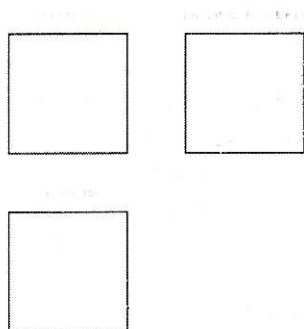


Fig. 06 Representação de um cubo através de vistas mongeanas

7. Representações Internas e Construção de Modelos Mentais

Representar graficamente um objeto é o processo de transformação do entendimento mental sobre o objeto (em questão) e a sua concepção através de signos. Isto é, representar é mostrar através de signos como um objeto é visto, é constituído ou formado e, como ele é percebido. As representações gráficas podem ser compartilhadas coletivamente ou serem de caráter estritamente pessoal.

As representações compartilhadas são aquelas que obedecem a algum tipo de normatização. Por exemplo, ao se representar uma peça (objeto tridimensional), através de projeções ortogonais, utiliza-se um sistema o qual é estruturado em normas, logicamente proposicionadas que permitem a compreensão por parte de outras pessoas que conhecem as regras dessa representação (fig.07).

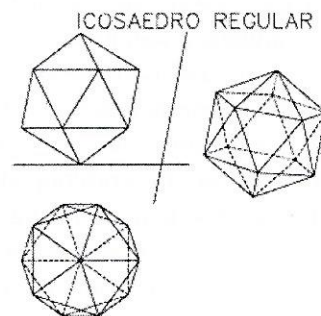


Fig. 07 Representação de um poliedro regular (icosaedro) no sistema mongeano

As representações gráficas e mentais que são pessoais ou individuais são aquelas inerentes à formação do indivíduo o qual as concebe através do 'espírito', podendo ter explicação científica ou não. Conjecturas podem ser feitas sobre esses tipos de representação por outras pessoas partindo de hipóteses baseadas em análises psicológicas.

Estudos nesse sentido têm sido feitos, como, por exemplo, para identificar os níveis de amadurecimento de uma criança por meio de seus desenhos e, a partir daí determinar se ela está em condições de ser alfabetizada. O que caracteriza essa representação pessoal, tanto mental como gráfica, é o fato de partir tanto do objeto a ser representado como da mente do indivíduo; neste último aspecto, implica dizer que se caracteriza pela forma como o cérebro dele processa as informações, a nível do seu consciente e do seu inconsciente. Um mesmo objeto, pode ser percebido de diferentes formas por diferentes pessoas que o observa, por exemplo, o médico que faz uma leitura de uma radiografia a verá distintamente da forma apresentada por um leigo. Por outro lado, pode ocorrer de se ter um treinamento de diferentes pessoas para identificarem certas regularidades do objeto em questão e isso permitirá a existência de invariantes nestas observações. Além disso, esta(s) ausência(s) de variação(o)es pode(m) ser temporais ou contextuais, ou seja, podem mudar conforme o contexto e o tempo (relativo e absoluto) e em períodos diferentes ou durante um período de tempo mais prolongado.

Em termos de uma analogia entre os modelos mentais de um indivíduo e o desenvolvimento ocorrido no campo da geometria apresentado anteriormente (seção acima), pode-se dizer que ambos caracterizam-se como situações cognitivas que passam por transformações. O modelo constituído na esfera das transformações ocorridas na formação do modelo mental do indivíduo assemelha-se às transformações ocorridas na esfera dos modelos geométricos. Quando o indivíduo idealiza algo da realidade (ou teórica) em sua mente, este algo passa por transformações mais simples ou mais complexas representando de forma

mais ou menos aproximada o objeto real. De uma mesma forma, ocorrem as transformações geométricas as quais acontecem a partir de uma menor ou maior retenção das características do objeto original representado.

8. Considerações Finais

A representação gráfica se baseia em axiomas e postulados de uma geometria. Independentemente dos princípios geométricos adotados tem-se, nesse tipo de representação, o modelo a ser representado e a representação deste modelo. Partindo-se do princípio de que se domina o sistema de representação gráfica e as propriedades geométricas do objeto, a configuração ou a forma como esse objeto vai se apresentar desenhado em um plano depende de uma série de variáveis como, por exemplo, a posição do objeto e do observador em relação ao plano de projeção.

Os modelos mentais, aparentemente, possuem um comportamento análogo. Partindo-se do princípio de que o conceito sobre algo é formado sob os preceitos admitidos por uma comunidade científica, vão existir convenções que delimitam o grau de transformação em uma representação. Dentre as variáveis permitidas, a representação interna ou mental de um modelo pode se apresentar de diferentes formas constituindo os sistemas de representação mental. Esses sistemas de representações mentais poderiam, então, serem comparados aos sistemas de representações geométricos, ou seja, o mongeano, axonométrico, cotado, etc, dependendo do indivíduo ou mais precisamente do conhecimento científico do indivíduo. Quando são feitas representações de um cubo com aresta de um metro em um

papel do tamanho ofício, por exemplo, trabalha-se com escala, havendo uma deformação em termos de medidas e dependendo do sistema utilizado na sua representação, o paralelismo e a perpendicularidade podem não permanecer na representação gráfica final; os invariantes dessas transformações ocorridas nas representações seriam os dados de referência para fazer as analogias.

Adotando-se essa analogia, poder-se-ia vir a entender-se o que ocorre com os modelos mentais dos alunos sob o prisma da geometria e, assim, estabelecer-se uma ponte entre as representações dos dois modelos, o geométrico/gráfico e o mental, para se compreender as suas 'CAs' e, a partir delas, armarem-se estratégias que permitissem alterar essas concepções, dando assim eficiência no ensino da geometria na educação nos vários níveis de ensino. A partir dessa identificação, poderiam ser buscadas estratégias que possibilitem ao professor interferir nas 'CAs' dos alunos e promover a construção de novas concepções que estejam de acordo com as teorias científicas.

9. Bibliografia

- ANDRADE, M. C. Q. *A criação no processo decisório*. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1980.
- ARMSTRONG, M. A. *Basic topology*, Berlin: Spring Verlag, 1983.
- AUSUBEL, D. Some psychological and educational limitations of learning by discovery, *The Arithmetic Teacher*, p. 290 – 302, May, 1964.
- AUSUBEL, D., NOVAK, J. & HANESIAN, H. *Psicologia educacional*. Tradução Eva Nick et al. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1978.
- CARAÇA, B. J. *Conceitos e fundamentos da matemática*. Lisboa: Sá da Costa, 1984.
- GRECA, I. M. Representaciones mentales. In: *PROGRAMA Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias*. Burgos, España: Universidade de Burgos; Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Texto de apoyo n. 7, 1999.
- MEDEIROS, C.F. *Modelos mentais e metáforas na resolução de problemas matemáticos verbais*. Recife: 2000. Submetido a Publicação.
- MOREIRA, M. A. Modelos mentales. In: *PROGRAMA Internacional de Doctorado en Enseñanza de las Ciencias*. Burgos, España: Universidade de Burgos; Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Texto de apoyo n. 8, 1999.
- MOREIRA, M. A., CABALLERO, M. C. & RODRIGUEZ, M. L. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. In: *ENCUENTRO INTERNACIONAL SOBRE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO, 1997*, Burgos. *Actas ...* Burgos: 1997. p. 19-44.
- SANTOS, J. *Números, geometrias e estabilidade do sistema solar*. Recife: 2000. Submetido a Publicação.
- SILVEIRA, F. L. A metodologia dos programas de pesquisa: a epistemologia de Imre Lakatos. *Caderno Catarinense de Ensino de Física*. Florianópolis: v. 13, n. 3, p. 219-230, 1996.

