O PAPEL DE UM SOFTWARE GRÁFICO NA COORDENAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS, ALGÉBRICAS E TABULARES DE FUNÇÕES

Francisco Carlos Benedetti[1]

BENEDETTI, F. C. O papel de um software gráfico na coordenação das representações gráficas gráficas, algébricas e tabulares de funções. **Revista Educação Gráfica**, Bauru, n.7, p.155-166, 2003.

Resumo

Este artigo investiga as potencialidades de um software gráfico na coordenação das representações múltiplas de funções, por pares de estudantes de primeira série do Ensino Médio, os quais iniciavam o estudo desse assunto em suas aulas de Matemática. Foi realizada uma pesquisa qualitativa, em que a estratégia metodológica "experimentos de ensino" foi utilizada ao se observarem suas ações no estudo das representações múltiplas de certas funções não tradicionalmente estudadas em sala de aula. As análises foram realizadas sob o ponto de vista teórico que entende o pensamento como a realização de um coletivo, o qual inclui seres humanos e tecnologias intelectuais. Os estudantes participantes coordenaram as representações de funções,

[1] Mestre em Educação Matemática pela Unesp de Rio Claro e professor da Faculdade Prudente de Moraes, em Itu (SP). E-mail: fcbenedetti@terra.com.br. Membro do GPIMEM (Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática), grupo coordenado pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, pertencente ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PGEM) da UNESP/Rio Claro. Home Page: www.rc.unesp.br/igce/pgem/gpimem.html.

especialmente a gráfica, a algébrica e a tabular, de maneira que suas ações foram condicionadas pelo *design* do software, incluindo sua capacidade de representar muitas funções e seus comandos *zoom* e barras de rolagem.

Palavras-chave: Funções, representações múltiplas, software gráfico.

Abstract

This paper investigated the potentialities of a graphing software to coordinate multiple representations of functions when used by pairs of ninth grade students who were beginning to study the subject in their regular classes. A qualitative study was conducted in which "teaching experiments" were used to observe their actions as they studied multiple representations of certain functions which are not traditionally studied in the ninth grade. The analyses were conducted from a theoretical perspective in which thinking is understood as being carried out by a collective that includes humans and intellectual technologies. The students who participated coordinated the representations of functions, especially of graphic, algebraic, and tabular representations, in such a way that their actions were conditioned by the design of the software, including its capacity to represent many functions, and its zoom commands and rolling bars.

Keywords: Functions, multiple representations, graphing software.

Apresentando a pesquisa

A expressão "gráfico" é de extrema abrangência em termos de significados, perpassa diversas áreas do conhecimento e está presente em diversos contextos transdisciplinares. No âmbito escolar, é importante ressaltar que um estudante trabalha com essa forma de expressão em diversos momentos, desde o Ensino Fundamental.

Neste artigo utilizarei, sob o ponto de vista de um professor-pesquisador em Educação Matemática, a forma como freqüentemente é empregada a noção de **gráfico** no Ensino Médio, ou seja, uma das maneiras de se representar certos objetos, classicamente estudados em Matemática, que se referem a relações e funções.

Nesse contexto, um **gráfico** se constitui numa das representações daquilo que em Matemática se conhece por "função": relações entre grandezas, ou entre elementos de dois conjuntos dados, de maneira que a cada elemento do primeiro conjunto, chamado domínio, corresponde um único elemento no segundo conjunto (contra-domínio). Outras representações são a expressão **algébrica** (ou **analítica**), como, por exemplo, $y=x+1$, e a **tabela**, disposição dos valores daqueles dois conjuntos, geralmente em colunas. Diversos trabalhos (BORBA, 1993; BRENNER et al, 1997; SCHWARZ, B., HERSHKOWITZ, 1999) utilizam a expressão "representações múltiplas" para indicar, dentre outras possibilidades, essas representações.

Dentro de um contexto no qual constam várias pesquisas realizadas que envolvem o trabalho com funções através de suas representações, desenvolvi uma pesquisa para analisar as maneiras como estudantes, em fase inicial do aprendizado desse assunto, transitaram pelas representações gráficas, algébricas e tabulares de funções, utilizando um software gráfico para estudar funções de diversas famílias.

O objetivo deste artigo é propiciar contribuições para as reflexões acerca da temática central desta publicação. Assim, apresento um dos tópicos utilizados na referida pesquisa para desenvolver a análise dos dados obtidos, a saber, a forma como comandos do software *Graphmatica*[2] constituíram o pensamento de pares de estudantes, em atividades nas quais trabalharam com funções que ainda não conheciam.

Para chegar a essa análise, contudo, apresento ao leitor, na seqüência, o contexto teórico-metodológico em que se desenvolveu a pesquisa, o qual se refere, de maneira resumida, à noção de "coletivos pensantes" de Lévy (1993, 1999). Em seguida, descrevo alguns dados que conduziram a essa análise.

Referências metodológicas e teóricas

Três pares de estudantes de primeiro ano do Ensino Médio, em fase inicial do estudo de funções em suas aulas regulares, lidaram com representações múltiplas de várias funções, junto a um software gráfico e, em diversas situações, conforme será analisado adiante, através do mesmo articulado às outras mídias disponíveis.

Os dados construídos nesta pesquisa proporcionaram reflexões a respeito de **como** estudantes lidaram com aspectos dessas funções. Focar-se nesse "como" é uma das principais características da pesquisa qualitativa, na qual seus objetivos não se baseiam na obtenção de resultados finais, como apontam Denzin e Lincoln (2000), Bogdan e Biklen (1994) e Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1999). Estudos qualitativos procuram analisar com profundidade o processo como se desenvolve certo fenômeno, neste caso, em atividades pedagógicas.

A caracterização desta pesquisa como qualitativa também se deu através da estratégia metodológica escolhida, conhecida como **experimentos de ensino**. De modo resumido, pode-se entender tal estratégia como seqüências de encontros em que um ou alguns estudantes e investigador realizam atividades de pesquisa e de aprendizagem. O segundo, no caso, assume um papel semelhante ao de professor, atuando como tal e interagindo com os estudantes (COBB, 2000).

Nesses encontros, normalmente, as atividades incluem instrumentos de registro, como câmeras de vídeo, gravador e caderno de campo, e métodos de pesquisa, como observação participante, entrevista e fichas de trabalho. Steffe e Thompson (2000), no âmbito das pesquisas em Educação Matemática, afirmam que os experimentos não se caracterizam por procedimentos padronizados, mas o pesquisador deve criar estratégias que visem explorar a matemática dos estudantes, através de uma seqüência de atividades construídas a partir de hipóteses em situações de ensino e de aprendizagem.

Ou seja, tal estratégia é caracterizada pelas ações articuladas de ensino e aprendizagem com atividades de pesquisa, nas quais se busca a compreensão de transformações pelas quais atravessa a matemática dos estudantes em períodos determinados, valorizando-se a experimentação como uma de suas características, focando-se menos na **classificação** de respostas dos alunos em "certas" ou "erradas".

[2] Software gráfico que disponibiliza simultaneamente gráfico, tabela e expressão analítica de uma função de uma variável, a partir desta última representação. Mais detalhes e informações podem ser obtidos no *site* http://www8.pair.com/ksoft/.

Tais considerações metodológicas são coerentes com o ponto de vista teórico com o qual foram desenvolvidas e analisadas as atividades deste estudo, nas quais estudantes transitaram pelas representações de funções. Com base na relevância das interações em processos de ensino e aprendizagem, utilizo a idéia proposta por Lévy (1993, 1999) das mídias como condicionantes do pensamento humano.

Esse autor desenvolve a noção do pensamento e do conhecimento como uma produção coletiva, postulando, em linhas gerais, que aquilo que se conhece assim é possível devido à atuação de tecnologias intelectuais diversas, junto aos seres humanos. "[...] O pensamento se dá em uma rede na qual neurônios, módulos cognitivos, humanos, instituições de ensino, línguas, sistemas de escrita, livros e computadores se interconectam, transformam e traduzem as representações" (LÉVY, 1993, p. 135). Ou seja, Lévy entende que o pensamento é realizado por um coletivo de homens-coisas, de forma que não é possível fragmentar esse pensamento em partes, as quais teriam origem no homem **ou** na mídia. O pensamento ocorre mediante ambos, e torna-se muito difícil imaginá-los separadamente.

Essa perspectiva indica que o pensamento que o ser humano manifesta não se realiza mediante uma característica exclusivamente individual, cerebral, independente daquilo que acontece ao seu redor, porém o pensamento se dá **com** alguém ou alguma coisa. Enquanto escrevo este texto, escrevo-o **com** os autores indicados e suas idéias, escrevo-o **com** meu microcomputador e **com** minhas notas de campo. Creio que o verbo **pensar**, nesses termos, deve ser usado também no sentido de **pensar com**, além do sentido de **pensar em**. "A consciência é individual, mas o pensamento é coletivo" (LÉVY, 1993, p. 170).

Seguindo esse autor, considero que o computador não é um mero extensor do conhecimento humano; mais especificamente no caso das atividades de pesquisa aqui desenvolvidas, a mídia informática é um dos constituintes de **coletivos pensantes**, ou seja, grupos que englobam alunos, professor e tecnologias intelectuais, alimentados por um dinâmico processo de ensino e aprendizagem.

Borba (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001) explora esse ponto de vista trazendo-o ao campo da Educação Matemática, ao desenvolver a metáfora "seres-humanos-com-mídias", entendendo que o conhecimento matemático, por conseguinte, também é condicionado pelas mídias disponíveis. Em relação às funções, Borba (1999) observa que o predominante enfoque algébrico no ensino de funções provavelmente se deve à preponderância do uso da mídia escrita, representada, entre outros, pelo livro didático. O uso de softwares gráficos ou calculadoras gráficas, contudo, favorecem uma abordagem mais visual, de maneira que a representação gráfica seja mais explorada.

Não procuro, com isso, combater o uso do livro didático, mas entendo que aproveitar as potencialidades que a mídia informática oferece pode ampliar a construção de significados associados às funções, uma vez que os softwares gráficos possuem características que favorecem a exploração de conceitos muitas vezes limitados pela mídia escrita. De acordo com a metáfora seres-humanos-com-mídias de Borba (BORBA, 1999, 2002; BORBA, PENTEADO, 2001), o pensamento dos estudantes pode, dessa forma, constituir-se através de aspectos também da mídia informática, além daqueles tradicionalmente construídos junto à mídia escrita.

No próximo item, apresento ao leitor cenas de alguns dos episódios construídos junto aos dados obtidos, ilustrando dinâmicas de coletivos pensantes, analisadas em atividades nas quais se engajaram pares de estudantes e o pesquisador, no caso, o autor deste artigo, desempenhando o papel de professor. Retornarei a estas questões teóricas mais adiante, para discutir como tais idéias se fizeram presentes no contexto desta investigação, em especial, no que diz respeito à atuação do software gráfico.

Tais episódios foram construídos junto a André e Gianluca, os quais não possuíam, à época dos experimentos, um desempenho em Matemática considerado satisfatório pelos critérios da escola em que estudam. Para facilitar a leitura desses dados, freqüentemente refiro-me ao professor que atuou nos experimentos na terceira pessoa, a fim de diferenciar seu papel em relação àquele de autor deste texto, indicado nas transcrições com a inicial "F"; a inicial "A" indica falas de André, enquanto "G" indica falas de Gianluca.

Dois episódios: O "teorema" AG-GA e as funções racionais

Analisando as similaridades e diferenças entre os gráficos gerados a partir das expressões analíticas $y=x^2$ e $y=x^3$ (figura 1), Gianluca e André haviam observado que se interceptavam no mesmo ponto (1,1); o professor perguntou então se havia uma maneira algébrica de se verificar esse fato, esperando que substituíssem x por 1 e fizessem os cálculos $y=1^2$ e $y=1^3$.

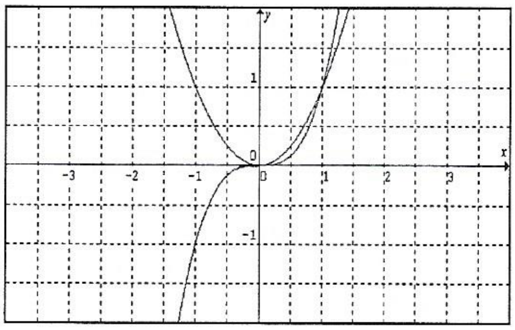


Figura 1: *Gráficos obtidos a partir das leis algébricas $y=x^2$ e $y=x^3$*

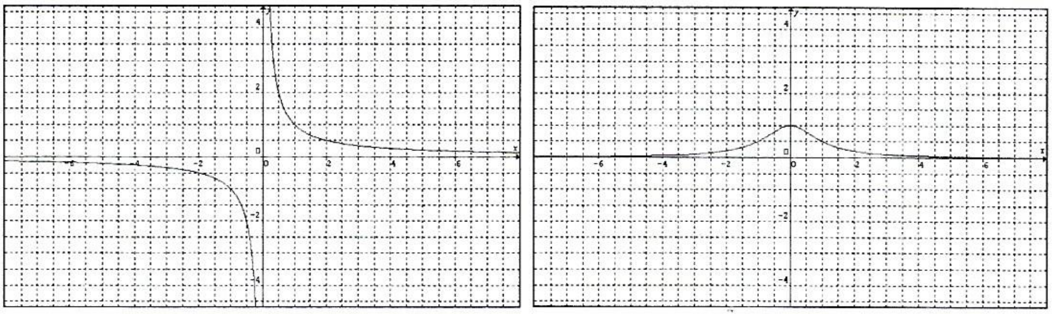
Gianluca, utilizando a letra **a** comumente atribuída ao primeiro coeficiente de um polinômio em sua forma completa, como $y=ax+b$ e $y=ax^2+bx+c$, afirmou que se esse coeficiente valesse 2, no caso especial em que os outros coeficientes valem zero, então os gráficos "passariam" pelo ponto (2,2); com o *Graphmatica*, através dos gráficos obtidos por $y=2x^2$ e $y=2x^3$, os alunos verificaram que é o ponto (1,2) e não (2,2) que pertence a essas funções, desapontando-os por um instante.

Os estudantes, a partir dessa questão, iniciaram um processo para deduzir um comportamento geral para funções do tipo $y=a.x^n$. Presumiram, em seguida, que gráficos de funções reais dessa forma, com $\mathbf{a}\in\Re$ e $\mathbf{n}\in N$, contêm o ponto (1,a), qualquer que seja o valor real de **a**; o debate sobre esta conjectura foi alternado com discussões envolvendo formas completas de expressões analíticas de funções polinomiais de 1º, 2º e 3º graus. André construiu, no papel, tabela e gráfico obtidos a partir da expressão analítica $y=2x^2$ para, em seguida, compará-los com tabela e gráfico oferecidos pelo software, chegando inclusive a constatar alguns erros de cálculo que havia feito.

A experimentação dos estudantes junto ao software caracterizou-se, neste episódio, pelo esboço de vários gráficos, alguns com e outros sem a intervenção do professor. Tal processo incluiu gráficos obtidos através de $y=x^2$, $y=x^3$, $y=2x^2$, $y=2x^3$, $y=3x^2$, $y=3x^3$, $y=4x^2$, $y=4x^3$, $y=x^{65}$ e outros; Gianluca utilizou ainda expressões como $y=4x^2+3x-12$ e $y=4x^2+x$ para ressaltar que a conjectura com a qual estavam trabalhando se referia apenas a expressões da forma $y=ax^n$. Após esse processo, que incluiu o cálculo requerido pelo professor, os estudantes constataram que gráficos de funções de expressão algébrica $y=ax^n$ possuem o ponto (1,a) em comum.

A mídia escrita priva-nos de muitos detalhes desta interação. As imagens, os sons, os gestos e as expressões usadas por esse coletivo enriquecem demasiadamente o episódio, não sendo possível apresentar tais itens neste artigo. A conjectura AG-GA, iniciais dos estudantes, recebeu comicamente o status de "teorema", refletindo de modo bem humorado a forma com a qual o grupo encarou o desafio algébrico proposto por mim, a partir de uma hipótese de Gianluca, construída por meio de esboços gráficos no *Graphmatica*. A expressão "teorema" foi utilizada pelos alunos numa forma de nomear a conjectura que construíram, mas posteriormente foram alertados pelo professor que tal termo possui significados matemáticos mais complexos.

Nesse primeiro episódio, foram trabalhadas características de funções polinomiais; outra família de funções sobre as quais André e Gianluca refletiram bastante foi a das racionais. As ações dos estudantes junto a dois exemplares dessas funções mereceram especial análise: a racional prototípica, dada por $y=1/x$, e a função de expressão $y=1/(x^2+1)$, representadas graficamente nas figuras 2 e 3, respectivamente.



***Figuras 2 e 3:** gráficos obtidos a partir de $y=1/x$ e de $y=1/(x^2+1)$, respectivamente.*

Todas as expressões analíticas apresentadas ao longo dos experimentos assim o foram de maneira usual, ou seja, sem especificar domínio e contradomínio; tampouco foram discutidas funções que possuem uma representação inviabilizada ou pouco expressiva. Dessa forma, perguntei aos estudantes, em cada uma das funções que foram trabalhadas, qual era o domínio das mesmas, procurando observar em quais representações suas respostas seriam baseadas.

No episódio em que a função racional da figura 2 foi trabalhada, tal questão proporcionou um intenso debate entre estudantes e professor, junto com as mídias diversas, sobre os significados gráfico e algébrico de domínio, bem como sobre as representações diversas de função. Após longa discussão que envolveu as três representações, a idéia de continuidade e outros itens, os estudantes afirmaram que o domínio de tal função se referia a todo o conjunto dos números reais. Apesar de discussões anteriores em relação ao fenômeno "encosta ou não encosta" e da mensagem de erro que a tabela oferecia para $x=0$, , os estudantes mantiveram sua posição: "o domínio é $\Re$!". Diante do impasse, o professor interfere algebricamente:

F: *Galera, eu posso pôr o zero naquela fórmula? No lugar do x?*

G: *Zero? Pode.*

A: *Ele é um número.*

F: *O zero é um número. [...] E 1 sobre 0? Quanto dá um sobre zero, então?*

G: *Zero. Um dividido por nada, dá nada.*

A: *Não, mas olha aqui na tabelinha: zero no x e no y deu erro.*

G: *Acho que não podia colocar o zero...*

A: *Vamos ver. Bom, um sobre zero dá zero, né? [...] Então, se x vai dar zero, y vai dar quanto? O y vai dar zero também, então vai dar dois zeros: zero e zero. Então teria que ter um ponto aqui no meio [mostra o ponto (0,0) no software].*

Seguiu-se, a partir daí, a discussão sobre a divisão **de** zero e **por** zero, com uma participação imprescindível do professor, não só para expor exemplos diversos de divisão e realizar várias perguntas, mas também para chamar a atenção dos estudantes à mensagem de erro que a calculadora lhes apresentou ao dividirem 1 por 0.

Em outro episódio, ao lidarem com a função representada na figura 3, a calculadora foi utilizada pelos estudantes, simultaneamente às imagens oferecidas pelo software gráfico. Após usar sucessivamente os comandos de zoom e as barras de rolagem do *Graphmatica*, os estudantes procuraram deduzir, de modo semelhante ao realizado com a função de expressão y=1/x, se o gráfico obtido por y=1/(x^2+1) "encostaria" ou não no eixo x.

Indagados pelo professor se o valor de y, para x = 176,2, era um valor "pequeno" ou "grande", concluíram pela primeira possibilidade, após discutirem sobre o significado de 322 X 10^-5. Tal discussão os levou à conclusão de que a variável y tendia a zero para valores "altos" de x. O professor, aproveitando a imagem em que Gianluca estava trabalhando (figura 4), na qual o gráfico parecia estar superposto ao eixo x, perguntou:

F: Que ponto é esse?

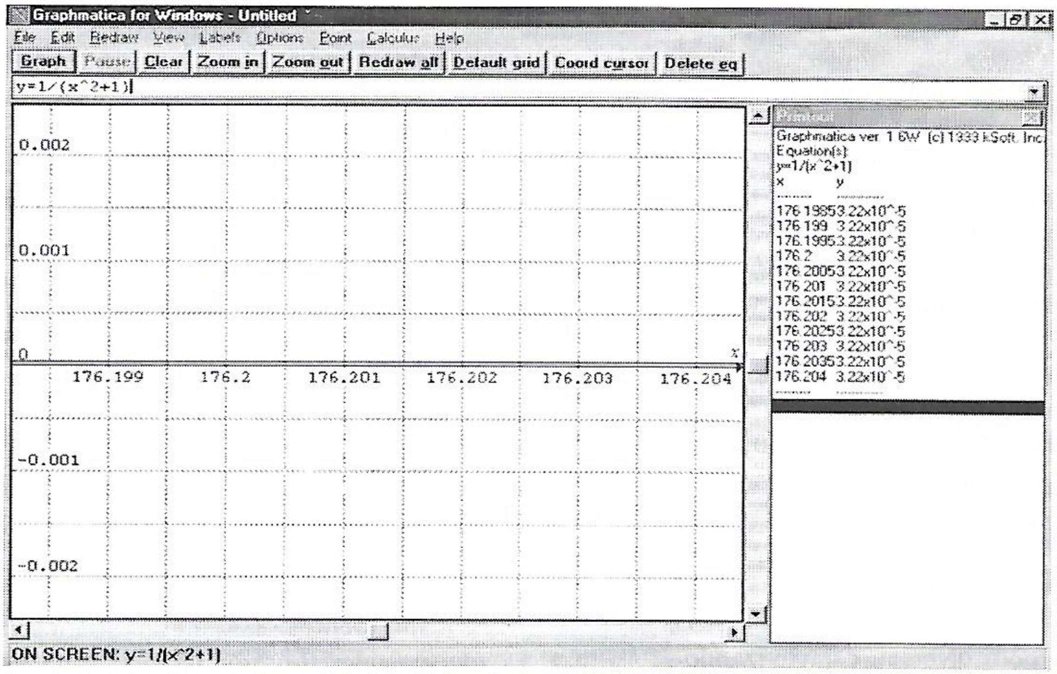


Figura 4: *A interface do Graphmatica, com as três representações da função racional mencionada, após várias aplicações de zoom e das barras de rolagem; o gráfico é visualizado bastante próximo ao eixo x.*

G: *[corretamente] É o ponto (250,0).*

F: *Ele está no gráfico?*

AG: *Está.*

F: *Então, se eu puser 250 na fórmula e fizer a conta, então o y vai dar zero.*

A: *Vamos ver [faz na calculadora] [...] 0,0000159, e não dá zero. Então, não encosta!*

Dessa forma, após usarem várias vezes os comandos *zoom* e barras de rolagem, observando valores na tabela e utilizando a calculadora para efetuar as operações com a expressão analítica da função, os estudantes concluíram que tal gráfico não teria ponto em comum com o eixo x.

Assim, realizada a apresentação de alguns dos dados da pesquisa, desenvolvo, no próximo item, uma apreciação desses dados sob o ponto de vista teórico resumidamente descrito no item 2, ou seja, analisando as maneiras como estudantes, professor-pesquisador e mídias constituíram-se em coletivos pensantes, engajados em processos de ensino e aprendizagem.

4. Uma análise das cenas apresentadas

Entendendo "plasticidade" como característica daquilo que pode ser moldado ou modificado, que pode assumir diferentes formas, observo, no primeiro episódio descrito, que a plasticidade do pensamento coletivo, condicionada, entre outras coisas, pela plasticidade do software, fez com que outros gráficos fossem esboçados e outra questão tomasse um lugar central nas discussões. Nota-se aí a característica multidirecional do pensamento em **rede**, noção que Lévy (1993) desenvolve ao discutir a forma como as mídias orais, escritas e informáticas constituem o pensamento de grupos diversos, caracterizando-se assim a noção de inteligência coletiva.

Para facilitar a retomada da perspectiva teórica aqui utilizada, apresentarei um trecho de Tecnologias da Inteligência (LÉVY, 1993), acrescido de grifos meus em negrito, mantendo, para tanto, os grifos em itálico originais do autor:

> *Um modelo digital não é* lido *ou* interpretado *como um texto clássico, ele geralmente é* **explorado** *de forma interativa. Contrariamente à maioria das descrições funcionais sobre papel ou aos modelos reduzidos analógicos, o modelo informático é essencialmente* ***plástico, dinâmico****, dotado de uma certa* ***autonomia de ação e reação*** *(p.121).*

As expressões destacadas encerram idéias extremamente importantes na análise da atuação do software durante os experimentos de ensino. A **exploração** interativa realizada pelos estudantes junto ao *Graphmatica* pôde ser observada em vários aspectos, sendo neste item detalhada, em especial, a forma como certas características do mesmo foram importantes nas ações do grupo.

Entendo que a **exploração** de Lévy (1993) relaciona-se, nesta pesquisa, à noção de **experimentação**, o que pedagogicamente concerne às tentativas e erros, construção de conjecturas, confirmação ou refutação das mesmas, levantamento de hipóteses, dentre outras considerações que podem emergir de atividades exploratórias, no caso, junto a um software gráfico.

Em seu aspecto **dinâmico**, o *Graphmatica* evidencia-se em sua capacidade de representar graficamente inúmeras funções de maneira prática, já que basta digitar uma expressão analítica para a obtenção de gráfico e tabela correspondentes. Essa característica do software permitiu que Gianluca obtivesse vários gráficos: $y=x^2$, $y=x^3$, $y=2x^2$, $y=2x^3$,

$y=3x^2$, $y=3x^3$, $y=4x^2$, $y=4x^3$ e $y=x^{65}$ foram expressões utilizadas para comprovar a validade da conjectura que chamaram de "teorema AG-GA", a qual postula que gráficos de funções de expressão analítica da forma $y=a.x^n$, $\mathbf{a}\in\Re$ e $\mathbf{n}\in N$, possuem o ponto referente ao par ordenado (1,a). Tal conclusão coordenou aspectos algébricos (valores do coeficiente **a** das expressões analíticas) com aspectos gráficos (coordenadas y de valores correspondentes àquele coeficiente).

A experimentação também foi verificada por meio de outro aspecto dessa mídia: ao se trabalhar com **uma mesma função**, os comandos de *zoom* e as barras de rolagem permitiram que os estudantes "navegassem" por suas características, principalmente em sua representação gráfica.

As barras de rolagem foram fundamentais para que os estudantes investigassem as características gráficas e tabulares das funções racionais descritas no item anterior. Como o leitor pode perceber através da figura 4, o uso desse comando, o qual permite serem variados os valores de x visualizados no gráfico, implica automática mudança na disposição de valores na tabela, tornando-a, também, à sua maneira, **dinâmica**. Tal característica, aliás, influenciou a escolha desse software dentre vários outros existentes.

Dessa forma, é possível notar a interligação entre as representações como uma realização condicionada pelas mídias; além da dinâmica do software em representar inúmeras funções, o que possibilitou a construção do "teorema" AG-GA, também pode ser destacado o fato de gráfico, tabela e expressão analítica terem sido coordenados pelos estudantes ao lidarem com o problema "x=0" na função racional prototípica: "Zero. Um dividido por nada, dá nada"; "Bom, um sobre zero dá zero, né?" (**expressão analítica**); "Não, mas olha aqui na tabelinha: zero no x e no y deu erro (**tabela**); "Então, se x vai dar zero, y vai dar quanto? O y vai dar zero também, então vai dar dois zeros: zero e zero. Então teria que ter um ponto aqui no meio" (**gráfico**).

Verifica-se, na seqüência desses diálogos, não apenas uma interligação entre as representações, mas também entre mídias: André utilizou a barra de rolagem até visualizar o gráfico aparentemente coincidente com o eixo x, observando o par ordenado (1148; 0.0009) no ponto correspondente do gráfico e nos respectivos valores da tabela. Após algumas observações simultâneas nestas duas representações, Gianluca utilizou a **calculadora** para dar sentido aos valores representados na tabela; esse exercício o conduziu a determinar o domínio da função racional, analisando que o zero não poderia pertencer a esse conjunto. Além disso, uma fala de André indica a coordenação entre álgebra e gráfico: "0,0000159 e não dá zero. Então, não encosta!".

A mídia escrita também esteve articulada ao uso do software, como nas cenas do primeiro episódio descrito, no qual André esboça o gráfico obtido por $y=2x^2$ através da construção, com lápis-e-papel, de uma tabela com inúmeros valores, comparando, em seguida, tais representações com aquelas que o software oferecia; essa articulação entre mídias levou Villarreal (1999) a utilizar a expressão "intermídias" para caracterizar, num ambiente de ensino e aprendizagem, o estudo de um mesmo fenômeno através de suas representações, em diferentes mídias.

O software, o lápis-e-papel e a calculadora condicionaram, dessa forma, a coordenação entre as três principais representações, nesse caso, com destaque para as possibilidades que a barra de rolagem e o comando *zoom in* proporcionaram aos estudantes, além da capacidade do *Graphmatica* de representar inúmeras funções dinamicamente.

De maneira geral, essa análise pode ser estruturada sob o conceito de **navegação**, apresentado por Lévy (1993), ao desenvolver a metáfora da rede hipertextual: "[...] Navegar em um hipertexto significa, portanto, desenhar um percurso em uma rede que pode ser tão complicada quanto possível." (p. 33).

"Complicado" aqui se refere ao não-seqüencial: as maneiras como os estudantes pensaram **com** os comandos do software não seguiram uma estratégia linear, uma seqüência de passos pré-estabelecida, mas a **autonomia** que lhes foi conferida, esboçando vários gráficos ou utilizando *zoom* e barras de rolagem à sua maneira, permitiu-lhes navegar pelas características gráficas das funções racionais propostas, discutir a divisão por zero e, dentre outras ações, relacionar valores da tabela com o comportamento gráfico, de modo que a calculadora favorecera esse trânsito, através de valores atribuídos à variável x em sua expressão analítica.

Dessa forma, entendo que esse processo de experimentação, que permeou a construção do "teorema" AG-GA e a coordenação entre as três representações (gráfico, álgebra e tabela) de funções racionais, para citar os exemplos constantes neste artigo, **dificilmente ocorreria, se as mídias disponíveis não incluíssem as tecnologias informáticas.**

Essa inferência não se deve apenas ao fato de que seria uma tarefa demorada construir todos os gráficos e todas as tabelas citados nesses episódios mediante lápis-e-papel, mas também ao fato de que seria muito difícil surgirem as conjecturas iniciais descritas, de forma a conduzir os estudantes aos debates posteriores, a suas confirmações, dúvidas e refutações.

Considerações finais

Com a descrição de algumas cenas procurei ilustrar a forma com a qual estudantes de primeiro ano do Ensino Médio, em início do estudo de funções, lidaram com características de funções que tradicionalmente não são trabalhadas em sala de aula, pelo menos naquilo que depende de currículo ou de considerável número de livros didáticos. Através da perspectiva teórica "coletivos pensantes seres-humanos-com-mídias", a análise se focou no papel que um software gráfico desempenhou em atividades nas quais tais funções foram abordadas.

Assim, a navegação pelas características de várias funções, protagonizada pelos estudantes e favorecida pela capacidade do software em apresentar **simultaneamente** as três principais representações de funções (gráfico, expressão algébrica e tabela), fornece indícios de que um conhecimento mais abrangente sobre esse assunto pode ser construído junto a essa mídia, de maneira que um mesmo fenômeno, estudado numa representação, pode ser entendido também em outra representação.

Em Benedetti (2003), o leitor pode consultar estas e outras conclusões nesse sentido, inclusive aquela que relata como certos conceitos, como monotonicidade, antes associados, pelos alunos desta pesquisa, apenas às funções intensivamente por eles estudadas, passaram a ser identificados também nas diversas funções com as quais lidaram durante os experimentos de ensino. Neste artigo, todavia, apresentei as formas como comandos e capacidades de um software gráfico condicionaram ações, de estudantes e professor, que indicaram a coordenação entre as representações de certas funções.

Referências

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1999. 203p.

BENEDETTI, F. C. **Funções, software gráfico e coletivos pensantes**. 2003. 316 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP, Rio Claro, SP.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em Educação***:* uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.□ 336p.

BORBA, M. C. Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1., 2001, Curitiba. **Anais...** Curitiba: Universidade Federal do Paraná, Universidade Tuiuti do Paraná, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2002. p. 135-146.

BORBA, M. C. **Students' understanding of transformations of functions using multi-representational software.** 1993. 377f. Tese (Doutorado em Filosofia) - Cornell University, Ithaca.

BORBA, M. C. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora Unesp, 1999. cap. 16, p. 285-295.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104p. (Tendências em Educação Matemática)

BRENNER, M. E. et al. Learning by understanding: the role of multiple representations in learning Algebra. **American Educational Research Journal**, v. 34, n. 4, p. 663-689, 1997.

COBB, P. Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Ed.). **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale: Erlbaum, 2000. cap.12, p. 307-333.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. The discipline and practice of qualitative research. **Handbook of Qualitative Research.** 2nd ed. London: Sage Publications, 2000. p. 1-28

LÉVY, P. **A inteligência coletiva:** por uma antropologia do ciberespaço. 3. ed. São Paulo: Edições Loyola, 1999. 212 p.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência**. o futuro do pensamento na era da informática. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993. 203 p.

SCHWARZ, B.; HERSHKOWITZ, R. Prototypes: brakes or levers in learning the function concept? The role of computer tools. **Journal for Research in Mathematics Education**. v. 30, n. 4, p. 362-389, 1999.

STEFFE, L. P.; THOMPSON, P. W. Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Ed.). **Research design in mathematics and science education**. Hillsdale: Erlbaum, 2000. p. 267-307.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. 1998.

387 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.