

ENTRE A GEOMETRIA DOS ESQUADROS E COMPASSO E A GEOMETRIA DINÂMICA

Maria Helena Wyllie Lacerda Rodrigues¹

Daniel Wyllie Lacerda Rodrigues²

Resumo

Este artigo promove uma discussão em torno de algumas diferenças entre a abordagem de problemas geométricos com o uso de métodos e instrumentos tradicionais e a que é feita por meio da 'geometria dinâmica'. Para avaliar as diversas capacidades cognitivas que podem estar sendo desenvolvidas quando se busca a solução gráfica para uma determinada questão de geometria, apresenta-se o enunciado de um problema, explorando-o em três ambientes dinâmicos atualmente disponíveis.

Palavras chave: resolução de problemas, geometria dinâmica, ensino gráfico

Abstract

This article discusses some of the differences between the approach of geometric problems through the use of traditional drawing tools and through 'dynamic geometry'. In order to evaluate the many cognitive abilities that may be developed as one seeks a graphical solution for a particular geometrical question, we present the outline of a problem. This is

¹ Profa Doutora da Escola de Belas Artes da UFRJ - Departamento de Técnicas de Representação, Ilha do Fundão, Cidade Universitária, Edifício da Reitoria, sala 713 - Rio de Janeiro - RJ - 21941-590 e-mail: wyllie@acd.ufrj.br

² Eng. de Computação, mestrando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Dep. de Eng. de Prod. - Campus Universitário Trindade - Florianópolis SC - 88040-900, e-mail: dwyllie@hotmail.com

analysed in three current available dynamic environments.

Key words: problem solving, dynamic geometry, graphics teaching

Introdução

Acostumados que sempre estivemos à geometria dos esquadros e compasso, dos desenhos fixos no papel ou no quadro-negro, dos traçados repetitivos e seqüenciais, das inúmeras linhas e das formas que, uma vez esboçadas, ocupavam definitivamente um determinado espaço, nos surpreendemos hoje com o potencial gráfico dos diversos programas de geometria dinâmica - uma fonte inesgotável para o tratamento de construções geométricas.

Não poucos são os pesquisadores que, na literatura específica, tecem inúmeras considerações a respeito das vantagens vivenciadas nesses micromundos. Morrow (1997: p.47), por exemplo, respondendo à pergunta que ele mesmo se faz - "Por que usar a Visualização Dinâmica?" - argumenta que "o *software* de geometria dinâmica estimula os alunos a 'brincar', a explorar e, com o incentivo dos professores, a formar conjecturas e pensar em problemas sobre aquilo que observam". Sem dúvida alguma, a G.Din. constitui o ambiente por excelência para experimentar diferentes caminhos na procura de respostas gráficas para exercícios de geometria. Provê os meios que permitem, ao usuário, raciocinar a partir da exploração de estruturas geométricas, de seus componentes e respectivos relacionamentos, bem como encontrar diversas alternativas para testar idéias na tentativa de resolver problemas. Possibilita, ainda, criar produtos

visuais de notável plasticidade (Rodrigues, 1999; Rodrigues e Rodrigues, 2000; Gani e Belfort, 2000).

Quais os principais beneficiários da geometria dinâmica?

Na opinião de Scher (2001: p.3), "num nível prático, a pesquisa voltada para o ensino da G.Din. pode beneficiar três populações na comunidade educacional: professores, organizadores de currículos e *designers* de *software*". Na defesa deste pensamento, o autor enumera os respectivos proveitos obtidos por estes profissionais: reconhecer obstáculos que poderão ser encontrados pelos alunos em seu aprendizado e detectar aquilo que pode conduzi-los à geração de idéias produtivas com o uso desta linguagem operacional; inspirar-se nos resultados das pesquisas de modo a criar atividades voltadas para as necessidades dos aprendizes que lidam com a G.Din.; ter em mãos um material que ajude a identificar novos aspectos a serem considerados no desenvolvimento de futuras versões deste tipo de *software*.

Concordamos com Scher nas justificativas que apresenta para evidenciar as vantagens usufruídas pelos três grupos citados. Fazemos porém uma ressalva, respondendo à pergunta anterior, de acordo com a nossa convicção:

Os principais beneficiários são os alunos.

Usando a geometria dinâmica para examinar um problema premiado

Em 1999, foi trazido a uma lista de discussão sobre um dos programas de G.Din. - o *Cabri-Géomètre II* - um problema que havia sido publicado em 1955 na revista italiana *Sapere*³. O objetivo era estimular os assi-

³ P.133 - Concorsi con Premi - nº 1157, exercício proposto por Gianni Arestì. O enunciado do problema foi divulgado pelo Prof. Cláudio Arconcher, um dos assinantes da lista Cabri (iniciativa do PROEM, PUC de São Paulo).

nantes da lista a tentarem resolvê-lo, usando aquele *software* e, posteriormente, compararem os diferentes métodos de resolução empregados.

Resolvemos o problema e editamos sua resposta gráfica com as ferramentas do *Cabri*, encaminhando-a para a lista. Logo após, algumas mensagens chegaram à nossa caixa de correio. Vale destacar o trecho de uma delas, como base para o questionamento que será feito adiante:

Bonita e interessante a solução que apresentaste ao problema do segmento congruente ao raio contido na corda. Podes comentar um pouco sobre o tipo de heurística que te 'inspirou' na solução? O procedimento usado está associado a uma classe de problemas?

Cumprе ressaltar que o caminho seguido na busca da solução para o problema foi o que sempre se utilizou para, tradicionalmente, resolver questões que demandam um certo raciocínio por parte do interessado. A G.Din. havia apenas fornecido os instrumentos para obter-se rapidamente o traçado da resposta. A 'heurística inspiradora', naquela situação, era a mesma que sempre desponta quando se detém, com atenção, nas 'pistas' camufladas no enunciado do problema.

Logo após terem sido disponibilizadas, na lista, as explicações relativas ao que fora perguntado, a colega voltava a escrever e comentava:

Me chamou atenção que na tua resolução pouco importou usar o *Cabri* (me parece que foi só a facilidade de ter um desenho bem feito)... uma questão que tenho me colocado é: o quanto o *Cabri* pode ajudar na resolução de problemas. Qual é tua opinião sobre isso?

Não tínhamos ainda uma resposta para dar naquele momento. Seria necessário

dedicar-nos com mais intensidade à investigação sobre os recursos do *software*, para que conseguíssemos estabelecer comparações entre os métodos usuais e os artifícios que podem ser explorados no universo da geometria dinâmica.

Há pouco tempo, retomamos o chamado "probleminha legal" (título que encabeçava as mensagens da lista *Cabri* sobre o assunto) e, já mais familiarizados com o ferramental deste e de programas similares, pesquisamos novas alternativas, procurando aproveitar ao máximo o potencial interativo-dinâmico de tais ambientes. Nessa prática nos deparamos com novos questionamentos, que nos incentivam a desenvolver algumas idéias no curso desta reflexão.

Até que ponto, na exploração de vias que permitem visualizar a solução de um problema, o "saber pensar" prepondera sobre o "saber fazer", ou vice-versa, e em que medida um destes comportamentos pode levar ao outro?

"Probleminha legal"

Eis o problema proposto: *Inscriver numa semicircunferência um triângulo ABC, tal que seus lados AC e CB (AB=diâmetro) cortem uma corda fixa MN, delimitando um segmento DE igual ao raio da semicircunferência* (Figura 1).

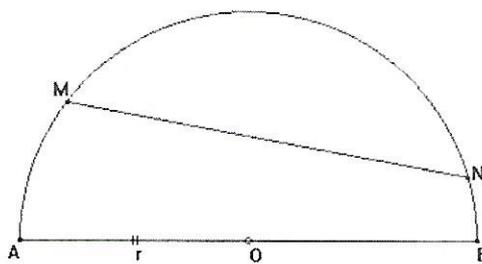


Figura 1: Dados do problema

⁴A mensagem foi enviada pela Profa Maria Alice Gravina, da UFRGS, à primeira autora deste artigo.

A leitura do enunciado sinaliza, inicialmente, dois modos distintos de lidar com o problema: (1) examinar as relações existentes entre os elementos envolvidos, com auxílio de uma figura de análise; (2) trabalhar por ensaio e erro, a partir dos dados e do que se pede.

Qual das alternativas exige maior esforço cognitivo por parte do solucionador? Qual delas demanda maior habilidade com as ferramentas da geometria dinâmica? Qual das vias caracteriza, com maior fidelidade, o que se entende por “processo de resolução de problemas”?

Embora as respostas para tais perguntas pareçam óbvias, há que se observar inúmeros aspectos de ambos os enfoques, examinando os passos dados em cada um deles, a fim de refletir sobre as capacidades que podem estar sendo desenvolvidas ou estimuladas naqueles momentos. O tema é polêmico e merece, no mínimo, uma avaliação mais cuidadosa. Vejamos, portanto, as nuances dos comportamentos a serem adotados diante das duas abordagens:

(1) Partir do esboço do problema, supostamente resolvido, pressupõe as tarefas de identificar um ponto-chave e procurar seus dois lugares geométricos. Aqui é essencial reconhecer as ‘pistas’ que são dadas no enunciado e buscar na memória os conceitos ali embutidos, de modo a vislumbrar as possíveis operações a serem realizadas.

(2) Experimentar posições sucessivas de elementos da construção até conseguir visualizar a configuração final, por sua vez, implica na escolha do ponto que poderá ser deslocado para atingir tal objetivo e no domínio das ferramentas gráfico-computacionais apropriadas.

Ao seguir-se um raciocínio fundamentado no exame das relações existentes entre os elementos da figura (alternativa 1) percebe-se que, provavelmente, ocorrerá ali uma translação cujo vetor v terá a direção da reta suporte da corda MN e comprimento igual ao do raio da semicircunferência dada. Seu sentido dependerá da escolha do ponto-chave para a questão. Tomando o extremo E do segmento contido na corda MN (interseção do lado BC com MN) como chave¹, são vislumbrados, para ele, os seguintes lugares geométricos: LG1- reta que contém a corda MN (pela condição imposta logo de início no problema); LG2 - arco capaz do ângulo de 90 graus, de diâmetro A'B (sabe-se que ABC é um triângulo retângulo, assim como A'BE). Note-se que A' é o transformado de A por translação de vetor v (vide explicação anterior). Uma vez descoberto o LG2 (semicírculo de diâmetro A'B), basta traçá-lo de modo a localizar o extremo E do segmento DE em sua interseção com a corda MN. O vértice C é também determinado, com facilidade, na interseção de seus dois LLGG: a reta suporte de BE e a semicircunferência dada. Há duas posições possíveis para o mesmo triângulo ABC (Figura 2).

Os ensaios relacionados com a alternativa 2 valem-se de um ponto manipulável que, ao assumir uma determinada posição, faz com que sejam respeitadas as demais imposições do enunciado. Note-se que, neste caso, é necessário lançar mão do potencial dinâmico do *software*, o que não acontece necessariamente no exemplo anterior, onde é possível trabalhar-se com instrumentos tradicionais de desenho. A Figura 3 apresenta imagens nas quais, deslocando-se o vértice C com auxílio da G.Din., pode-se enxergar a localização adequada deste pon-

⁵ Também poderia ter sido eleito como chave o ponto D, caso se utilizasse o vetor em sentido contrário, fazendo a translação de B, de modo a obter B', e traçando o arco capaz (90°, B'A).

alguns, dos quais não podemos de todo discordar. No entanto, ponderamos que, na procura de alternativas 'dinâmicas', várias capacidades cognitivas são também estimuladas e desenvolvidas; não é tão simples assim reconhecer o elemento que deverá ser movido para obter-se o efeito desejado. Acreditamos ainda que, na pesquisa destas vias, dá-se a oportunidade de estudar diversas características e propriedades daquelas configurações, tendo-se assim uma visão mais ampla do problema. O principal, neste caso, é não considerar tal caminho como definitivo mas, ao contrário, continuar raciocinando de modo a determinar o ponto-chave e resolver, de fato, a questão.

Um terceiro tipo de tratamento merece ainda ser explorado no exercício⁷. Aqui, arbitra-se na corda MN um segmento DE com a grandeza requerida, traçam-se semiretas pelos pares de pontos A,D e B,E e determina-se o ponto C, em sua interseção, tomando-o como chave no problema. Note-se que, por ter sido aleatório o posicionamento de DE, o ponto C não pertence à semicircunferência, como imposto no enunciado (Figura 4).

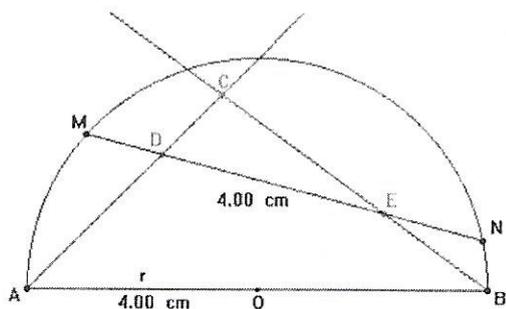


Figura 4: Alocação arbitrária para o segmento DE

É interessante observar que este enfoque combina certas características dos

anteriores, pois escolhe-se também um ponto-chave - neste caso o vértice C, cujo primeiro LG já é conhecido, mas recorre-se à \dot{C} .Din. para obter-se seu segundo LG. Isso é feito, ativando-se a ferramenta *locus*, obtendo-se então, automaticamente, o traçado da trajetória descrita por C em função do deslizamento de ED na reta suporte da corda MN. Para nossa surpresa, uma vez que sem ajuda da ferramenta *locus* não teríamos facilidade para visualizar este lugar geométrico, trata-se de uma hipérbole. Em sua interseção com a semicircunferência, determina-se o ponto C procurado.

Convém lembrar que, para localizar-se com exatidão tal vértice do triângulo, é necessário construir a hipérbole indicando cinco pontos do *locus* e, só então, determinar sua interseção com a semicircunferência.

Usamos a trinca dinâmica para explorar esta solução: *Cabri-Géomètre II* (Laborde e Bellemain, 1994), *The Geometer's Sketchpad* (Jackin, 1990) e *Cinderella* (Richter-Gebert e Kortenkamp, 1999), embora algumas facilidades e limitações possam ser notadas ao trabalhar-se em cada um destes ambientes.

Uma das diferenças refere-se ao traçado da hipérbole, que pode ser feito no *Cabri-Géomètre II* (Figura 5) e no *Cinderella* mas não no *Geometer's Sketchpad* (Figura 6), uma vez que este não disponibiliza as cônicas. Assim, embora se obtenha o *locus* para o ponto-chave, não há como determinar o vértice C com precisão neste último. Outra distinção merecedora de destaque diz respeito à ferramenta 'rasto' (rastro; *trace on/off*), que é ativada quando se deseja visualizar a trajetória de um determinado elemento geométrico. O caminho descrito pelo ponto C, neste caso, é registrado na tela a partir do

⁷ Esta alternativa foi trabalhada pela Profa Danusa Chini Gani e trazida à mesa de discussão, num projeto desenvolvido na EBA da UFRJ, coordenado pela primeira autora deste artigo.

deslocamento de D pertencente à reta suporte de MN. O *Cinderella* não possui tal recurso; em compensação, ele nos dá o cen-

tro da hipérbole (ponto de maior realce na figura 7), possibilidade que os demais não oferecem.

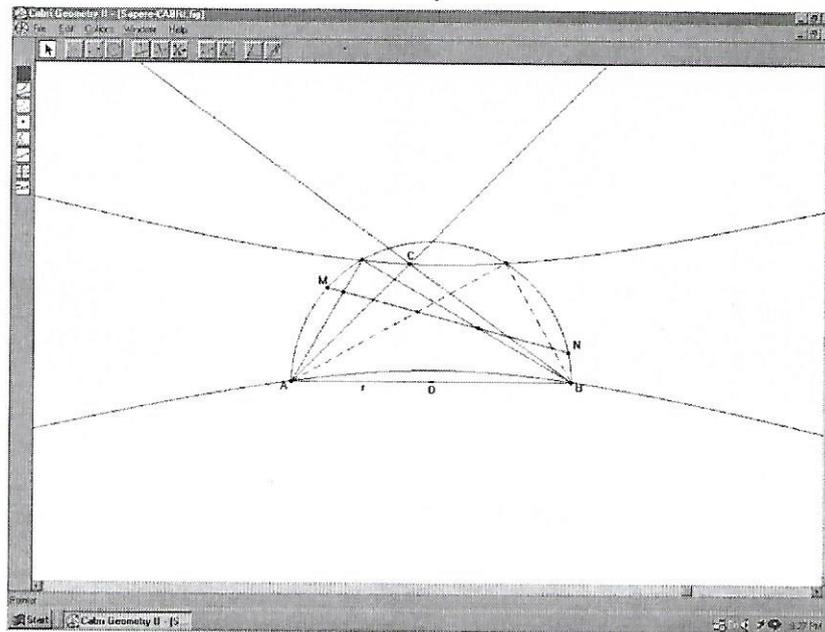


Figura 5: Recursos ao locus - Cabri-Géometrell

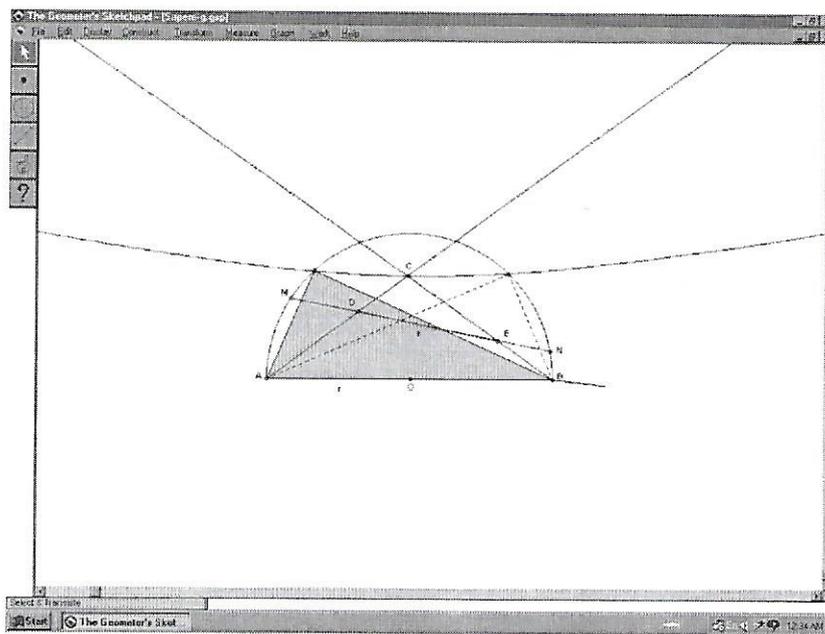


Figura 6: Recurso ao locus - The Geometer's Sketchpad

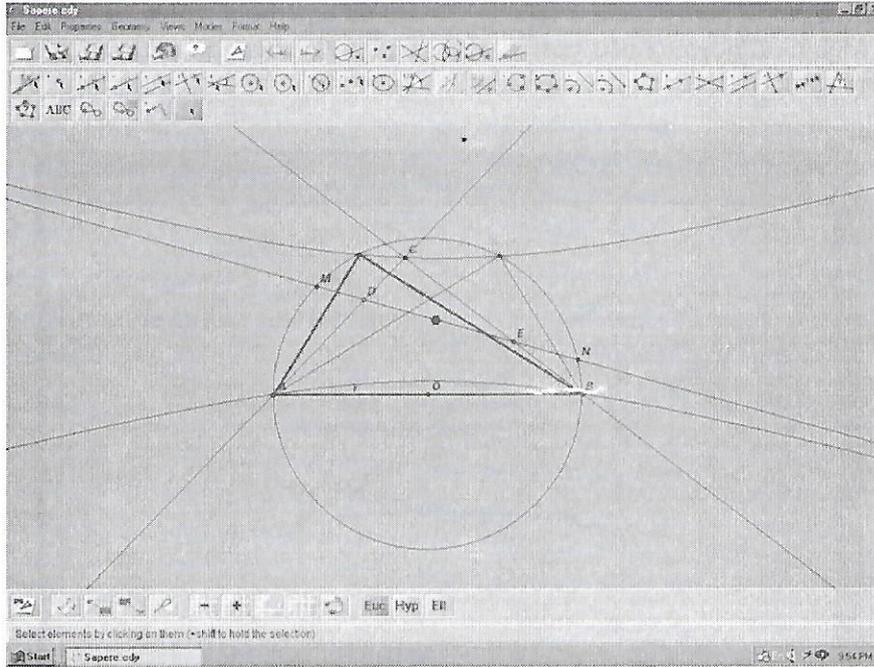


Figura 7: Recurso ao locus - Cinderella

Recorrendo à geometria analítica

Descobrir, com auxílio da geometria dinâmica, que a hipérbole era um lugar geométrico para o vértice C do triângulo pedido no problema serviu de estímulo para que procurássemos analisar tal configuração pela geometria analítica.

Primeiramente coloca-se o centro da semicircunferência coincidente com o pon-

to que representa a origem dos eixos de coordenadas, de forma a fixar os pontos A e B sobre o eixo horizontal x. Depois são escolhidas as equações correspondentes aos lugares geométricos encontrados no problema (Tabela 1), assim como os pontos principais que poderão ser utilizados nos próximos cálculos (Tabela 2).

Lugar Geométrico	Equação	Contém
reta 1	$y = ax + b$	lado AC do triângulo ABC
reta 2	$y = cx + d$	lado BC do triângulo ABC
reta 3	$y = ex + f$	corda MN
Circunferência	$R^2 = x^2 + y^2$	pontos A, B, C, M e N

Tabela 1: Lugares geométricos e equações correspondentes

Ponto	Coordenadas	Definidas pelos sistemas de equação
A	$(-R, 0)$	reta 1 e circunferência
B	$(-R, 0)$	reta 2 e circunferência
C	(x_c, y_c)	reta 1, reta 2 e circunferência
D	(x_d, y_d)	reta 1 e reta 3
E	(x_e, y_e)	reta 2 e reta 3
M e N	(x_m, y_m) e (x_n, y_n)	reta 3 e circunferência

Tabela 2: Definição de pontos como resultados de sistemas de equações

O problema consiste em encontrar as coordenadas x_c e y_c do ponto C, tendo apenas os valores do raio R da circunferência e dos coeficientes e e f da reta 3. No entanto, são considerados não apenas os segmentos AB, BC e MN mas também a continuação das retas suporte que os definem, assim como a circunferência completa de raio R (Tabela 2). As limitações do problema original são aplicadas após a determinação das soluções para esta situação mais abrangente.

$$A \in \text{reta 1}: 0 = a(-R) + b \therefore a = \frac{b}{R}$$

$$B \in \text{reta 2}: 0 = c(R) + d \therefore c = -\frac{d}{R}$$

As retas 1 e 2 são perpendiculares, significando que a multiplicação de seus coeficientes angulares é igual a -1 , ou seja:

$$ac = -1 \therefore a = -\frac{1}{c} \therefore \frac{b}{R} = -\frac{1}{-\frac{d}{R}} \therefore \frac{b}{R} = \frac{R}{d} \therefore b = \frac{R^2}{d} \therefore a = \frac{R}{d}$$

Com os coeficientes a, b e c em função de d, as equações das retas 1 e 2 adquirem nova aparência:

$$\text{reta 1: } y = ax + b \therefore y = \frac{R}{d}x + \frac{R^2}{d} \therefore y = (x + R)\frac{R}{d}$$

$$\text{reta 2: } y = cx + d \therefore y = -\frac{dx}{R} + d \therefore y = \left(\frac{-x}{R} + 1\right)d$$

$C \in \text{reta 1} \wedge C \in \text{reta 2}$.

$$(x_c + R)\frac{R}{d} = \left(\frac{-x_c}{R} + 1\right)d \therefore x_c = \frac{-(-d^2 + R^2)R}{d^2 + R^2} \therefore y_c = 2\frac{dR^2}{d^2 + R^2}$$

$D \in \text{reta 1} \wedge D \in \text{reta 3}$:

$$(x_d + R)\frac{R}{d} = ex_d + f \therefore x_d = \frac{R^2 - fd}{R - ed} \therefore y_d = e\left(\frac{R^2 - fd}{R - ed}\right) + f$$

$E \in \text{reta 2} \wedge E \in \text{reta 3}$:

$$\left(\frac{-x_e}{R} + 1\right)d = ex_e + f \therefore x_e = \frac{(-f + d)R}{eR + d} \therefore y_e = \frac{d(eR + f)}{eR + d}$$

A distância do segmento DE é igual ao raio R:

$$R^2 = (x_e - x_d)^2 + (y_e - y_d)^2 \therefore R^2 = \frac{(-fR^2 - eRd^2 + 2dR^2 - fd^2 + eR^3)^2(1 + e^2)}{(eR + d)^2(-ed + R)^2}$$

E determina a equação de 4^o grau em d:

$$\alpha d^4 + \beta d^3 + \gamma d^2 + \delta d + \theta = 0$$

Onde:

$$\alpha = f^2 + 2e^3Rf + e^4R^2 + 2eRf + f^2e^2$$

$$\beta = -2eR^2 - 6e^3R^2 - 4e^2Rf - 4Rf$$

$$\gamma = 3R^2 + 6e^2R^2 + 2f^2 + 2e^2f^2 - 3e^4R^2$$

$$\delta = 2R^2e + 6e^3R^2 - 4e^2Rf - 4Rf$$

$$\theta = e^3f^2 - 2eRf + f^2 + e^4R^2 - 2e^3Rf$$

Encontrar as quatro raízes (d_1, d_2, d_3 e d_4) desta equação não é uma tarefa trivial, mas é um feito possível¹ por análise numérica e que possibilita o cálculo posterior das soluções para o ponto C. Entretanto, destas quatro, nem todas representam respostas válidas para o problema. Para uma raiz d_n determinar um ponto C_n válido, ela precisa garantir que os pontos E_n e F_n sejam internos à corda MN.

¹ Os cálculos foram realizados com o auxílio do programa Maple 6.02 (MAPLE, 2001). A verificação foi feita para um caso específico de valores, onde $R=4$, $e=-0.2566086407$ e $f=1.6096557415$.

O desenvolvimento apresentado leva em consideração que o ponto C pertence à semicircunferência. Entretanto, para determinar a equação da hipérbole é necessário que a afirmação anterior seja falsa, assim como a relação de perpendicularidade entre as retas 1 e 2. Mesmo para um indivíduo acostumado a efetuar cálculos algébricos, a descoberta da equação que representa esta cônica exige um considerável esforço. As palavras de Rogers & Adams (1990) ilustram bem este tipo de situação.

Na gráfica computacional várias aplicações envolvem as construções de geometria plana. A projeção de peças de máquinas e os sistemas de desenho com auxílio do computador são exemplos disso. Determinar a localização de uma seção cônica e a sua interseção e/ou ponto de tangência com outra seção cônica ou uma linha são problemas específicos. À primeira vista, os problemas parecem ser triviais ou relativamente simples. No entanto, quando os elementos geométricos são alocados arbitrariamente numa superfície bidimensional, podem existir várias soluções, a escolha da solução apropriada talvez não seja óbvia e a aplicação matemática envolvida é, freqüentemente, não linear.

(ROGERS & ADAMS, 1990: p.231)

Considerações finais

Encontrar resposta para a pergunta "O quanto a geometria dinâmica pode ajudar na resolução de problemas?" não é tão fácil quanto possa parecer, mesmo que se dedique muito tempo a investigar a potencialidade dos programas assim classificados. A dificuldade de opinar sobre a questão baseia-se no fato de que cada interessado tem sua própria "visão de micromundo" influenciada pelos conhecimentos que já traz consigo, na maioria das vezes obtidos por

meios tradicionais. A tendência, neste caso, é resolver os problemas analisando-os mentalmente, como de hábito, e utilizar as ferramentas do *software* para a otimização e agilização das operações gráficas. Contudo, vale a tentativa de colocar-se na posição de um iniciante, bem como a de observar atentamente a reação de alunos ainda calouros no estudo de conceitos geométricos, avaliando os resultados que conseguem obter ao trabalharem com a G.Din.. Muitas descobertas podem então ser feitas, obtendo-se dados relevantes para novas pesquisas.

Pelo que tivemos a chance de perceber até o momento (vide o exemplo tratado neste artigo), usando-se este meio como ambiente de trabalho, ora a "mente dirige a mão" que ativa as ferramentas adequadas, ora dá-se o contrário, isto é, os ensaios feitos com os recursos computacionais estimulam a raciocinar e a buscar explicações para as respostas gráficas encontradas. O fenômeno pode ser interpretado dialeticamente, pelo fato de ocorrer ali uma espécie de "luta" entre comportamentos aparentemente opostos, que acaba por propulsionar um movimento de reorganização das idéias antes instaladas.

Ter como objetivos estabelecer uma conciliação de maneira que "mão" e "mente" possam trabalhar em conjunto e refletir sobre que alternativas usar e/ou em que momento cada uma delas deve ser incentivada, como método e prática no estudo das técnicas de representação da forma, contribuirá para o esclarecimento do próprio significado de "educação gráfica".

Referências bibliográficas

- GANI, Danusa Chini, BELFORT, Elizabeth. Painéis em Geometria Dinâmica: novas possibilidades. In: 1º CONGRESSO DE EDUCAÇÃO – CEC. Rio de Janeiro, 2000. p.102-110.

- JACKIN, Nicholas. **The Geometer's Sketchpad**. Berkeley: Key Curriculum Press, 1990.
- LABORDE, Jean Marie, BELLEMAIN, Frank. **Cabri-geometry II**. Dallas: Texas Instruments, 1994.
- MAPLE. Waterloo Maple Advancing Mathematics. <<http://www.maplesoft.com>> (22/05/2001).
- MORROW, J. Dynamic Visualization from Middle School Through College. In: **Geometry Turned On** – dynamic software in learning, teaching and research, eds. James R. King and Doris Schattschneider. Washington: Mathematical Association of America, 1997. p. 47-54.
- RITCHER-GEBERT, Jürgen & KORTENKAMP, Ulrich H. **The Interactive Geometry Software Cinderella**. Berlin: Springer, 1999.
- RODRIGUES, Maria Helena Wyllie L. A Contribuição do Cabri-Géomètre para um Projeto de Integração das Disciplinas Gráficas. In: CABRI WORLD 99, São Paulo. <http://www.cabri.com.br>. 1999.
- RODRIGUES, Maria Helena Wyllie L, RODRIGUES, Daniel Wyllie L. "Transpontuais": Uma Alternativa Dinâmica para o Estudo Interdisciplinar de Conceitos Geométricos. In: **Educação Gráfica**, vol .4, Bauru: 2000. p. 51-60.
- SCHER, Daniel. Student's Conceptions of Geometry in a Dynamic Geometry Software Environment <<http://www.1.5.addr.com/~dscher/>> (17/03/2001).
- ROGERS, David F., ADAMS, J. Alan. **Mathematical Elements for Computer Graphics** Second Edition, New York: McGraw-Hill, 1990.