

O DESENHO GEOMÉTRICO COMO INSTRUMENTO NO ENSINO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Anderson Roges Teixeira Góes¹

Heliza Colaço²

Resumo

Este artigo relata uma metodologia do ensino da Trigonometria por meio do Desenho Geométrico, com a perspectiva de que o mundo atual exige uma formação do cidadão com significado real e sintonize-o com uma visão de mundo diferente. Ao aplicarmos a metodologia verificamos através da forma com que os alunos se expressaram graficamente a motivação, pois descobriram e construíram o conhecimento. Com o desenrolar da metodologia comprovamos que o Desenho Geométrico pode, e deve, ser inserido na disciplina de matemática como alternativa a metodologia tradicional. Com as análises dos seus resultados, percebemos que: a melhoria da qualidade do ensino e, conseqüentemente, a melhoria da prática de ensino depende do envolvimento do corpo docente na busca de novas metodologias; e os educadores precisam ter clareza de suas obrigações e assumirem suas responsabilidades como cidadãos, proporcionando aos alunos metodologias sólidas na construção de conhecimento.

Palavras-chave: Desenho Geométrico; Trigonometria; Metodologia de Ensino.

Abstract

This article talks about a teaching methodology of trigonometry through Geometric Design, with the perspective that the current world demands the formation of the citizen with a real meaning and tunes it with a different view of the world. At applying the methodology, we verified through the way the students expressed themselves graphically, that it has created a real motivation on the students, because they have discovered and built knowledge. With the development of the methodology we have confirmed that Geometric Design can, and must, be inserted into Mathematics as an alternative to the traditional methodology. With the analysis of the results, we have noticed that the improvement in teaching quality and, consequently, the

¹ Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia. Universidade Federal do Paraná – Departamento de Expressão Gráfica e Secretaria Municipal de Educação de Araucária – Departamento de Tecnologia Educacional. E-mail: artgoes@ufpr.br

² Licenciada em Matemática. FAE São José – Centro Universitário. E-mail: helizacol@hotmail.com



improvement in teaching practice depends on the development of teacher staff involvement in search of new methodologies; and the educators need to be sure of their obligations and assume their responsibilities as citizens, providing students solid methodologies in the construction of knowledge.

Keywords: Geometric Design, Trigonometry, Teaching Methodology.

1. Introdução

Com a perspectiva de que o mundo atual exige uma formação que tenha significado para o cidadão e sintonize-o com uma visão de mundo diferente, para assim garantir a uma formação que o torne o protagonista na construção do conhecimento, criamos e aplicamos na Escola Municipal Planalto dos Pinheiros, município de Araucária/Pr, uma metodologia de ensino da Matemática por meio do Desenho Geométrico.

A metodologia proposta é uma alternativa à tradicional, pois resgatamos nela a importância da geometria como fonte de conhecimento, inspiração e a criação.

O desenvolvimento de metodologias alternativas cria elo entre a teoria e prática em sala de aula. Assim este trabalho propõe a utilização de materiais de fácil acesso, dando oportunidade aos alunos de construir o seu próprio conhecimento, com grande participação em sala de aula.

A História conta que as primeiras tentativas de comunicação foram realizadas através de Desenhos, as chamadas pinturas rupestres, que ao longo dos tempos sofreram uma evolução no sentido da simplificação da linguagem chegando à escrita atual. Mesmo assim o Desenho não perdeu a sua importância como meio de comunicação e de expressão, sendo utilizado paralelamente à escrita.

Assim, este artigo relata experiência desenvolvida nas aulas de Matemática com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, onde através do Desenho Geométrico construíram o novo conhecimento "Relações Trigonométricas". Com isto, os alunos puderam desenvolver os eixos da Matemática: números e operações; grandezas e medidas; e tratamento da informação.

2. Revisão de Literatura

A literatura apresenta várias metodologias para o ensino-aprendizado da Trigonometria de forma diferente da didática tradicional, seja com materiais manipuláveis (Andrade e Alves (2002)), com *softwares* de ensino de geometria (Martins (2003); Lima Filho et al. (2005); Leal e Rodríguez (2006); e Sicre e Munguía (2007)) ou mesmo buscando descobrir a origem da dificuldade do ensino deste conteúdo (Carneiro et al. (2001) e Brito e Morey (2004)). No entanto, metodologia utilizando o Desenho Geométrico parece não ter na literatura.

O conhecimento sobre trigonometria não deve ser baseado apenas em livros didáticos, segundo Carneiro et al. (2001). Estes autores propõem uma visão mais ampla desta área, possibilitando ao docente e ao discente uma



leitura crítica sobre os conceitos e assuntos no geral, que na maioria das vezes são apresentados por aglomerado de fórmulas e equações de difícil compreensão. Constam ainda, que grande parte dos alunos possui dificuldade quanto à compreensão das definições relacionadas à trigonometria ao desenvolver o trabalho. Assim, os autores buscam contribuir com material de apoio para professores, amenizando as necessidades iniciais que os alunos apresentam com relação a este tópico. Concluem que o objetivo de oferecer um aprendizado significativo dos conceitos trigonométricos nas soluções de situações-problema e desenvolver o raciocínio crítico dos alunos foi atingido com a metodologia desenvolvida.

Para Andrade e Alves (2002) cada aluno possui sua forma de compreender. Assim, os autores desenvolvem trabalho relacionado à Trigonometria nos Ensinos Fundamental e Médio, com o objetivo de utilizar a construção de materiais didáticos e trabalhos de campo para proporcionar ao aluno uma aula mais atrativa. Ao final da metodologia utilizada, concluem que com a construção de materiais e as aulas de campo, o processo ensino-aprendizado se realiza de forma agradável e a motivação nos alunos é visível.

Metodologia para o estudo de seno e cosseno foi desenvolvida por Martins (2003) e realizada em três etapas, onde iniciaram a construção do conhecimento por triângulos retângulos, passando para o ciclo trigonométrico e por fim utilizaram gráficos das funções correspondentes. A autora afirma que esta metodologia acrescentou aos alunos o conhecimento mais amplo de tais conceitos. Ressalta ainda que no desenvolvimento do trabalho foi necessária uma seqüência didática repleta de atividades para a validação do proposto: verificar se aos alunos utilizaria estes conhecimentos (trigonometria no triângulo retângulo, ciclo trigonométrico e o *software Cabri-Géomètre*) na construção de gráficos das funções seno e cosseno. Por meio desta sondagem foi possível diagnosticar que o *software* se mostrou muito eficaz auxiliando os alunos a relacionarem os conceitos já vistos no triângulo retângulo e ciclo trigonométrico com as funções seno e cosseno.

Brito e Morey (2004) relatam a pesquisa realizada com professores da rede pública de ensino de Natal. O objetivo foi verificar as dificuldades que os mesmos possuem com relação à trigonometria. Para isto, as autoras buscam evidências entre tais dificuldades e a formação inicial dos mesmos. Apesar da avaliação positiva realizada pelos professores participantes, as autoras consideram que a variedade de atividades foi insuficiente para a construção dos conceitos trigonométricos abordados. Assim sugerem que seja realizada uma pesquisa para verificar como o conteúdo de Trigonometria é trabalhado na formação inicial de professores e desta forma, indicar caminhos para uma aprendizagem significativa desses futuros profissionais da educação.

A utilização do *software LEMAT* (Laboratório Virtual de Matemática) no estudo dos conceitos de Trigonometria, segundo Lima Filho *et al.* (2005), contribui de forma positiva para a compreensão dos mesmos, visto também que há grande envolvimento e motivação por parte dos alunos ao realizarem as implementações e relatórios necessários durante as pesquisas. Assim, por ser apresentada uma prática de ensino e de descobertas matemáticas, o



docente pode desenvolver novas atividades aplicadas à trigonometria, como também para outros assuntos inclusos na disciplina de Matemática.

Segundo Leal e Rodríguez (2006) é necessário proporcionar ao aluno não só uma série de conceitos como também as ferramentas e estratégias para a exploração, relação, análise e demonstração para que se aprenda com solidez os sentidos e propriedades trigonométricas. Assim, os autores propõem: desenhar, desenvolver e avaliar as razões trigonométricas através da Geometria Dinâmica; analisar as demonstrações que surgiram com o uso do *software Cabri Géomètre*; e analisar os procedimentos, as estratégias, os erros e as dificuldades encontradas durante as atividades propostas. Com estas análises, os autores concluem que as atividades promoveram novos procedimentos e estratégias de ensino que contribuíram de forma positiva atingindo o objetivo da aprendizagem e investigação da Trigonometria.

Sicre e Munguía (2007) apresentam elementos que proporcionam estruturar um projeto de investigação no uso da tecnologia no estudo da Matemática. Para tanto, utilizam o *software Cabri Géomètre II*. Com os resultados obtidos, os autores afirmam que a pesquisa da “transposição didática”, que modifica a apresentação dos saberes trigonométricos através de uma didática diferente da tradicional, é possível com o uso do Cabri Géomètre II em sala de aula.

Assim, verifica-se que na literatura há um gama de trabalhos relacionados à trigonometria, mostrando a preocupação dos educadores em metodologias alternativas para que o aluno realmente se aproprie do conhecimento.

3. Construção do Novo Conhecimento

O conteúdo Relações Trigonométricas se apresentado de forma tradicional, é considerado pelos alunos algo abstrato e de difícil compreensão. As perguntas mais freqüentes quando o assunto é trigonometria são:

- Porque seno de 30° é 0,5?
- Porque tangente de 45° é 1?

Mediante a essas indagações propomos a atividade de investigação e construção de conhecimento.

A descrição deste relato de experiência mostra uma possibilidade real de tornar a Matemática significativa, sendo o Desenho a principal ferramenta.

3.1. Relato da Atividade

Ao iniciar a atividade os estudantes foram divididos em grupos de 3 ou 4 alunos. Cada grupo recebeu 4 folhas de papel para construir circunferências de raio 10, 8, 6 e 4 cm (cada estudante foi responsável por uma circunferência).

Na construção das circunferências, percebemos que muitos alunos não possuíam habilidade na utilização do compasso, talvez pelo fato da extinção de



disciplinas de Desenho Geométrico no currículo atual da maioria das escolas. Mesmo quando esta disciplina é ofertada os alunos possuem vivência somente no Ensino Fundamental.

Deste fato decorre o não conhecimento dos postulados do Desenho Geométrico que segundo Putnoki (1989) são:

- **1º Postulado:** Os únicos instrumentos permitidos no Desenho Geométrico, além do lápis, papel, borracha e prancheta, são: a régua não graduada e o compasso.
- **2º Postulado:** É proibido em Desenho Geométrico realizar cálculos com as medidas fornecidas; todavia, considerações algébricas são permitidas na dedução (ou justificativa) de um problema, desde que a resposta seja depois obtida graficamente obedecendo aos outros postulados.
- **3º Postulado:** Em Desenho Geométrico é proibido obter respostas "à mão livre", bem como "por tentativas".

A extinção/interrupção desta disciplina nos Ensinos Fundamental e Médio é a causadora de falhas no domínio das propriedades da Matemática (com relação à geometria), na coordenação motora ao utilizar os instrumentos, na caligrafia técnica, entre outras peculiaridades desta disciplina.

Durante a aplicação desta metodologia foi preciso retomar muitos conceitos, começando pela construção das circunferências, seus elementos (raio, diâmetro, centro, curva) e a definição de círculo.

Realizada a construção das circunferências solicitamos o traçado de dois diâmetros perpendiculares (eixos). Apesar de saberem o que são retas perpendiculares, os alunos não sabiam construí-las.

Nesta etapa, desenvolvemos a teoria de retas perpendiculares e as várias situações de construção com régua e compasso, como exemplo: dada uma reta "r" construir uma reta "s" perpendicular a "r" e que contenha o ponto "P". Na primeira situação "P" pertence a "r" e na segunda situação "P" não pertence a "r".

Prosseguindo com a metodologia os estudantes traçaram dois diâmetros perpendiculares. (figura 01)

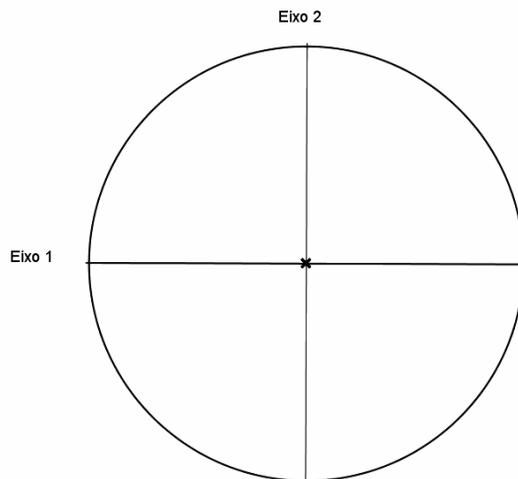


Figura 01 – Eixos perpendiculares.

Os alunos construíram com régua e compasso os ângulos de 30° , 45° e 60° sendo: o vértice desses ângulos é a interseção dos eixos; e um dos lados do ângulo a semirreta contidas no "eixo 1". Até esta fase da experiência os alunos não sabiam qual conhecimento estava sendo construído, pois não lhes foi dito. (figura 2)

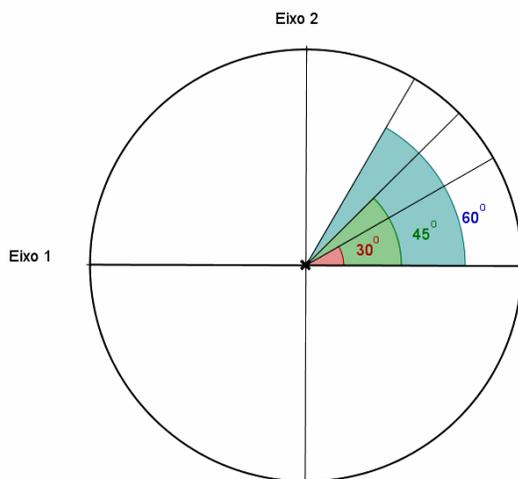


Figura 02 – Ângulos de 30° , 45° e 60° .

Em seguida os alunos traçaram, a partir da interseção do lado do ângulo com a circunferência, segmentos perpendiculares ao "eixo 1" utilizando régua e compasso, obtendo assim um triângulo retângulo para cada ângulo. Desta forma, foi definido hipotenusa, cateto oposto e cateto adjacente (Figura 03).

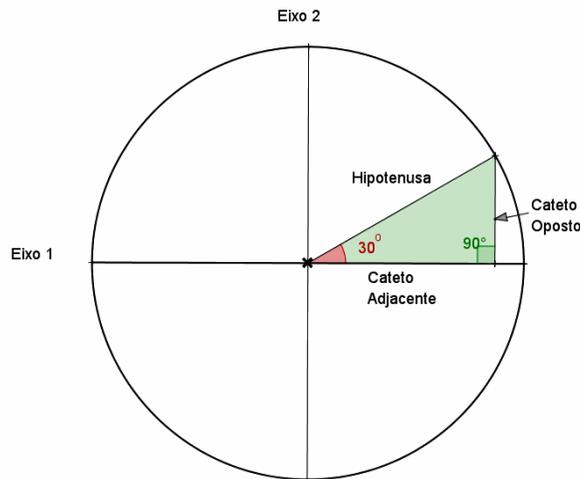


Figura 03 – Exemplo do triângulo retângulo para o ângulo de 30°.

Com a utilização da régua os estudantes mediram os lados destes triângulos e efetuaram cálculos para encontrar a razão entre: cateto oposto e hipotenusa; cateto adjacente e hipotenusa; cateto oposto e cateto adjacente.

Com os resultados elaboraram tabelas para cada circunferência (raio 10, 8, 6 e 4 cm) e ângulo (30°, 45° e 60°).

Comparando os valores para cada ângulo nas diferentes circunferências os estudantes verificaram que os resultados possuíam valores aproximados mesmo quando comparado com outros grupos.

Após nossa mediação os estudantes concluíram que os valores deveriam ser iguais, mas devido à precisão do material utilizado nas construções e nos traçados houve imprecisão no desenho, sendo esta a causa do “erro”.

Neste momento as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo, bem como tabela que apresentava os seus valores com precisão foi exposta. (tabela I)

Tabela I: Relações Trigonômicas dos Ângulos Notáveis

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Terminada esta etapa da metodologia, onde através do Desenho Geométrico os alunos se apropriaram das “Relações Trigonômicas”, foi preciso formalizar a obtenção algébrica dos valores que constam na tabela I.



Assim, os alunos realizaram uma atividade para obtenção dos valores dos ângulos 30° e 60° através do triângulo equilátero.

Nesta atividade os estudantes aplicaram o “Teorema de Pitágoras” para encontrar o valor da altura do triângulo equilátero através da propriedade de triângulos que diz:

“Tomando \overline{AB} a base do triângulo isósceles ABC , tem-se que a mediatriz do lado \overline{AB} , a altura do triângulo relativa ao lado \overline{AB} e a bissetriz do ângulo C são coincidentes”

Esta mesma propriedade é válida para o triângulo equilátero, tomando \overline{AB} como base do triângulo.

Na figura 04 tem-se o triângulo equilátero onde constam seus ângulos e a altura. Como a altura é também a mediatriz, temos que \overline{AP} e \overline{PB} são congruentes, logo $AP = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Pela propriedade acima citada tem-se que altura é a bissetriz do ângulo C logo $\hat{ACP} = \hat{BCP} = 30^\circ$

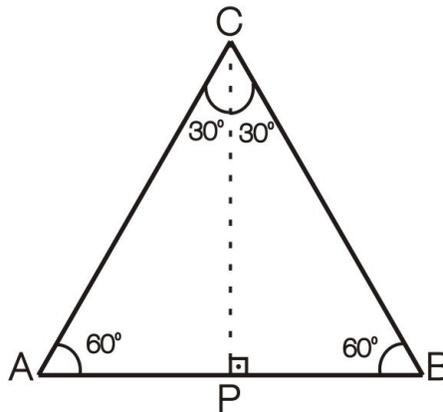


Figura 04 – Triângulo equilátero

Desta forma, aplicando o “Teorema de Pitágoras” tem-se que a altura $\overline{CP} = \frac{\overline{AB}\sqrt{3}}{2}$.

Através da definição das razões trigonométricas, os alunos determinaram os valores de seno, cosseno e tangente de 30° e 60° . Como exemplo, é apresentando o cálculo do seno de 60° :

$$\text{sen}60^\circ = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{AC}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,87$$



Atividade semelhante foi realizada utilizando um quadrado ABCD para determinar o seno, cosseno e tangente de 45° . Para isto, os estudantes traçaram a diagonal \overline{AC} obtendo o triângulo retângulo ABC, sendo $\hat{CAB} = \hat{ACB} = 45^\circ$.

4. Aplicação do Novo Conhecimento

Após a definição das relações trigonométricas foram expostas algumas aplicações deste conteúdo, dentre elas a utilização no cálculo de alturas desconhecidas utilizando o teodolito como instrumento de trabalho.

Após as explicações do manuseio de um teodolito os alunos foram ao pátio do colégio para realizar a atividade cujo objetivo é determinar a altura do bloco da sala de aula.

Os grupos (mesmos integrantes da primeira fase da experiência) realizaram a coleta de alguns dados necessários para este cálculo.

Escolhido o bloco que se deseja saber a altura, os estudantes obtiveram o ângulo no teodolito, mediram a distância do teodolito até o bloco e a altura do teodolito. (figura 05)



Figura 05 - Alunos utilizando o Teodolito

Com estes dados, realizaram em sala o desenho da situação vivida e os cálculos necessários para obter a altura desejada do prédio.

Nestes cálculos os alunos utilizaram a relação trigonométrica Tangente, que envolve a medida do cateto oposto ao ângulo e a medida do cateto adjacente a este mesmo ângulo. Não houve dificuldade em realizar cálculos e o esboço da situação, pois os mesmos quando se apropriaram do conhecimento, compreenderam e o adquiriram de forma sólida.

5. Considerações Finais

Durante a aplicação da metodologia verificamos que a forma de expressar graficamente utilizada pelos alunos criou uma motivação real, pois estes descobriram e construíram o conhecimento.



A criatividade e a empolgação pela apropriação do conhecimento se manifestaram em todos os alunos, pois sem exceção todos participaram das etapas do processo. Os estudantes que não conseguiam concluir rapidamente uma etapa não eram desmotivados, pois sempre havia um aluno que os ajudavam.

Com o desenrolar da metodologia comprovamos que o Desenho Geométrico pode, e deve, ser inserido na disciplina de Matemática. Aqui utilizamos o termo “pode, e deve”, pois apesar de ser parte dos conteúdos de Matemática, a vivência nos mostra que a maioria absoluta dos professores desta disciplina não constrói os conhecimentos do Desenho Geométrico com seus alunos.

No caso específico do conteúdo abordado “Trigonometria” percebemos que as dúvidas comuns aos alunos não surgiram, diferente da forma tradicional onde questões como as apresentadas na seção 3 deste artigo são comuns.

Experiências como a relatada, ajudam os alunos a terem mais vivência Matemática e perceber que esta disciplina é aplicada em situações reais.

Podemos afirmar que a melhoria da qualidade do ensino e, conseqüentemente, a melhoria da prática de ensino depende do envolvimento do corpo docente na busca de novas metodologias. Os educadores precisam ter clareza de suas obrigações e assumirem suas responsabilidades como cidadãos, enfrentando os desafios que certamente surgirão.

Concluimos que educar não é, e nunca foi, uma tarefa fácil, pois requer educadores dispostos a buscar novas metodologias em que seus alunos construam um conhecimento solidificado.

Referências

ANDRADE, Éder Luiz Pereira; ALVES, Valdir. **Métodos de Ensino da Trigonometria para o Ensino Fundamental e Médio.** In: *XI Encontro Anual de Iniciação Científica – UNESPAR.* Maringá, 2002.

BRITO, Arlete de Jesus; MOREY, Bernadete Barbosa. **Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental.** Revista Horizontes, v. 22, n.1, p. 65-70, jan./jun. 2004

CARNEIRO, Júnior Marques; PARDIM, Paulo Oneis Dias; CRUZ, José Hilário da Cruz; FERREIRA, Dianne Maria de Castro; SANTOS, Ronaldo Antonio. **Melhoria do Ensino da Trigonometria.** In: *X Jornada de Matemática - UFG.* Rialma, 2006

LEAL, Jorge Enrique Fiallo; RODRÍGUEZ, Angel Gutiérrez. **Unidad de Enseñanza de las Razones Trigonométricas en un Ambiente Cabri para el Desarrollo de las Habilidades de Demostración.** Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Disponível em <www.uv.es/AngelGutierrez/apregeom/archivos2/FialloGutierrez06.pdf> Acessado em 20 de fev de 2009.



LIMA FILHO, José de Melo Lima Filho; ROCHA, José Arimatéa; CAVALCANTI, Lialda Bezerra. **Uso do LEMAT no Ensino de Trigonometria.** *In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática.* Belo Horizonte, 2005.

MARTINS, Vera Lúcia de Oliveira Ferreira. **Atribuindo significado ao seno e cosseno, utilizando o software Cabri-Géomètre.** Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/PUC-SP). 2003

PUTNOKI, José Carlos. “JOTA”. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico.** São Paulo: Scipione, v. 1, 1989.

SICRE, Oscar Jesús San Martín; MUNGUÍA, José Luis Soto. **Construcción de Significados para las Razones Trigonométricas Mediante un Aparato Virtual Diseñado con Cabri.** *In: XVII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas – Universidad de Sonora.* México, 2007.