ENGENDRAMENTO DOS POLIEDROS PLATÔNICOS

Bruno Leite Ferreira[1]

Ana Magda Alencar Correia[2]

Resumo

O estudo sistemático sobre os poliedros regulares convexos inicia-se na antiguidade. O filósofo grego Platão, sec. IV a.C., compara os sólidos descritos pelos pitagóricos aos elementos da natureza e estuda sua geração. Ao longo do tempo outros geômetras aprofundam as propriedades dos denominados sólidos místicos, de modo a se perceber inúmeras relações entre eles. Em 1596, Johannes Kepler inscreve-os uns nos outros para explicar a distância dos planetas ao sol. Poncelet (séc. XIX), a partir do princípio da dualidade, demonstra nos poliedros platônicos que o número de seus vértices é igual ao número de faces do seu dual. Pacioli, no período do Renascimento, retoma os estudos de Euclides (360 a.C. — 295 a.C) e escreve a obra De Divina Proportione, na qual descreve 12 casos de inscrição entre os poliedros regulares convexos. A partir do trabalho de Pocioli e fundamentados nas propriedades de dualidade e simetria, estudamos o engendramento entre os poliedros platônicos, a partir de seções planas, como proposto por SÁ (1982), a fim de buscar as leis de seção das truncagens, tendo em vista a sua generalização.

Palavras-chave: poliedros platônicos, truncagem, engendramento.

Abstract

The systematic study on the convex regular polyhedrons was initiated in the ancient times. The Greek philosopher Plato, sec. IV B.C., compares the solids described by the Pythagoreans with the elements of the nature as well as studies its generation. As time passed by the other geometricians have deepened the properties of the ones called mystics solids, in order to notice innumerable links among them. In 1596, Johannes Kepler correlated each other in order to explain the distance from the planets to the sun. Poncelet (séc. XIX), based on the Duality Principle, demonstrates in the platonic

[1] Mestrando do programa de pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. E-mail: bruno_lf@hotmai.com

[2] Professor Doutor, Adjunto do Departamento de Expressão Gráfica da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. E-mail: anamagda@gmail.com

polyhedrons that the number of vertexes is equal to the number of faces of its dual. Pacioli, in the period of the Renaissance, retakes the study of Euclid (360 B.C. - 295 a .C) and writes the De Divina Proportione, in which describes twelve cases of registration among the regular convex polyhedrons. From the work of Pocioli on the Platonic Polyhedrons, and based on the principle of duality and symmetry, we study the addition propriety between the platonic polyhedrons, from plain sections, as considered for SÁ (1982), in order to search the laws of section of the truncated parts, viewing its generalization.

Keywords: platonic polyhedra, truncate, engender

1. Considerações Iniciais

Os poliedros regulares convexos atraem a curiosidade de estudiosos desde a Grécia antiga, por apresentarem características que aproximam suas aparentes diferenças. No sec. IV a.C, o filósofo grego Platão compara quatro dos cinco poliedros com os quatro elementos fundamentais da natureza (fogo, ar, terra e água), dando ao dodecaedro o papel de representar o universo. Platão descreveu a formação destes sólidos a partir dos triângulos escalenos que compõem as suas faces (triângulos regulares, quadrados e pentágonos). Desde então, estes poliedros tornaram-se conhecidos como *Sólidos Platônicos.*

Euclides de Alexandria (360a.C.–295a.C.) na sua obra *Elementos*, dedicou os dois últimos dos treze livros ao estudo dos poliedros, demonstrando a existência de cinco e apenas cinco poliedros regulares convexos, e suas inscrições em uma esfera. Tal feito é atribuído a Teaetetus, matemático grego da Academia de Platão, especialista no estudo das grandezas incomensuráveis.

Já no séc. VI d.C. Pappus de Alexandria estudou as projeções dos poliedros platônicos na superfície esférica e, Isodoro de Mileto (séc. VI d.C.), demonstrou o princípio da dualidade, estabelecendo que o número de faces de um poliedro regular é igual ao número de vértices do seu dual.

Em 1596, Johannes Kepler (1571-1630), em sua obra *Mysterium Cosmographicum*, estabeleceu um modelo do sistema solar onde os cinco sólidos platônicos eram colocados um dentro do outro, separados por uma série de esferas inscritas. Ele conjecturou que as razões entre os raios das órbitas dos planetas coincidiam com as razões entre os raios das esferas(Figura 1)[3].

[3] http://www.uff.br/cdme/kepler/kepler-html/kepler-br.html

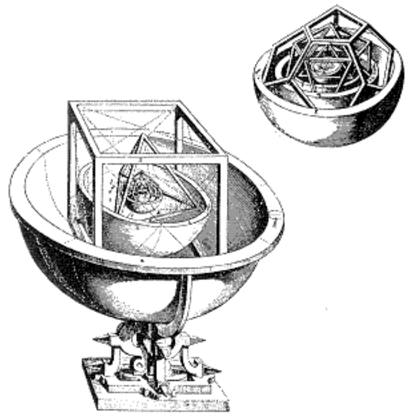


Figura 1 - Modelo de Kepler[4].

Posteriormente, Leonhard Euler, no séc. XVIII d.C. demonstrou que a soma do número de vértices com o número de faces de qualquer poliedro convexo homeomorfo[5] à esfera, excede em duas unidades o número de suas arestas.

No Renascimento, os poliedros regulares foram utilizados para a realização de estudos de perspectiva, em obras de Paolo Uccello, Piero della Francesca, Albrecht Dürer, Leonardo da Vinci, Luca Pacioli e Leonardo Pisano (o Fibonacci)[6]. Dentre eles destacamos Dürer, o qual planificou os poliedros platônicos e utilizou a projeção ortogonal para representá-los, projetando-os segundo os seus eixos de simetria e, Pacioli, que em sua obra *De Divina Proportione* trata da inscrição dos poliedros regulares uns nos outros (BERTATO, 2008, p.xxi).

Com base no estudo de Pacioli, suscitamos o interesse sobre o engedramento entre os poliedros regulares, evidenciando a possibilidade de a partir de qualquer um deles, obter os demais por meio de truncaduras.

2. Truncadura

Uma das operações projetivas é cortar, ou secionar. No espaço, tal operação determina o processo de truncagem, através do qual um objeto interceptado por um plano, tem uma das partes removida, originando uma seção plana; o sólido resultante é, então, denominado de sólido truncado ou tronco de sólido. A expressão tronco é bastante conhecida, associada ao estudo dos prismas, pirâmides, cones e cilindros (Figura 2).

---

[4] Fonte: http://web.me.com/dtrapp/ePhysics.f/graph.f/Keplers.gif

[5] Dois espaços topológicos dizem-se *homeomorfos* se existir uma aplicação entre esses espaços que seja contínua, invertível e a sua inversa seja contínua. (http://pt.wikipedia.org/wiki/Homeomorfismo).

[6] Disponível em http://www.atractor.pt/simetria/matematica/docs/regulares2.html , acessado em 6 de outubro de 2009.

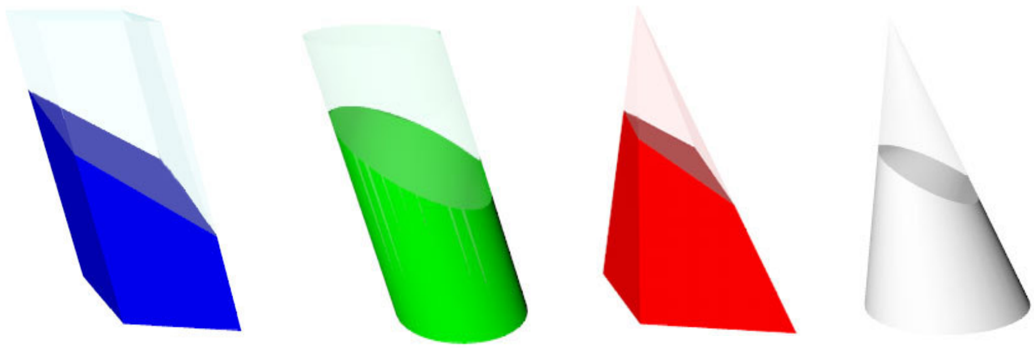


Figura 2: Tronco de prisma, de cilindro, de pirâmide e de cone.

Nos casos do prisma e do cilindro, após o corte a forma é dividida em dois troncos; já nos casos de pirâmide e cone, a forma é dividida em duas partes, sendo uma delas uma pirâmide ou um cone e, a outra, o seu tronco (Figura 3). Caso o plano de seção corte as arestas laterais da superfície lateral do prisma ou as geratrizes do cilindro paralelamente às faces paralelas da forma, os seus troncos são novos segmentos de prima e cilindro; assim, não se pode deduzir, apenas pela observação, que foram gerados por truncagem. Podemos dizer, então, que para gerar um tronco de prisma, o plano de seção intercepta a arestas da sua superfície lateral obliquamente às faces paralelas do prisma, determinando sua *lei de seção*.

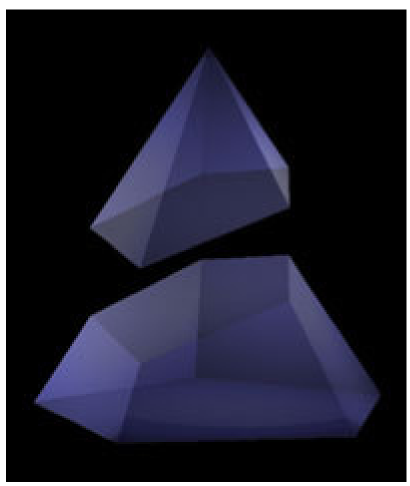


Figura 3: Pirâmide Truncada

Identificamos assim três tipos de truncagem: de *vértice*, de *aresta* e de *face*. O primeiro corresponde ao exemplo do tronco de pirâmide, quando a parte retirada não possui nenhuma face, ou aresta, intacta do sólido de origem. O segundo, quando a parte retirada possui apenas uma aresta intacta do sólido de origem e, o terceiro, que corresponde ao exemplo do trunco de prisma, quando a parte retirada possui apenas uma face intacta do sólido de origem.

Nessa direção, buscamos as *leis de seção* possíveis de gerar, a partir de um poliedro regular convexo outro, também regular convexo.

3. Caso de Estudo

“Os poliedros regulares engendram-se uns aos outros, seja secionando-se por planos, seja interligando pontos definidos das arestas ou das faces, de modo que de cada um, é sempre possível obter-se os demais” SÁ (1982, p. 61).

Outros pesquisadores, a exemplo de RANGEL (1982) e MONTENEGRO (1984), reafirmam este enunciado e demonstram algumas dessas transformações. Interessa-nos estudar, descrever e sistematizar cada caso, de modo a nos apontar possíveis generalizações quanto às *leis de seção*.

Neste contexto, consideramos um poliedro como o de origem e outro como o resultante da truncagem; isto significa que o poliedro resultante está inscrito no poliedro de origem. Das vinte e cinco possíveis combinações entre os poliedros regulares convexos, Pacioli, nos capítulos XXXIV ao XLV da obra “De Divina Proportione” trata doze casos dessas inscrições (BERTATO, 2008), não contemplando algumas, a exemplo, daquelas em que o tetraedro está como sólido circunscrito, excetuando o caso do octaedro inscrito no tetraedro. Assim, partindo dos estudos de Pacioli, estudamos a inscrição dos poliedros regulares convexos em cada caso para, posteriormente determinar as leis de seção, buscando sua generalização.

3.1. Inscrição Poliédrica

Os poliedros platônicos são ditos regulares por serem equiangulares e equifaciais. Como conseqüência destas propriedades, podemos afirmar que a distância do centro do poliedro para cada um dos seus vértices, centros das faces, ou pontos médios das arestas é a mesma.

Como todos os vértices são eqüidistantes do centro, o poliedro, admite uma esfera concêntrica que contém cada um dos vértices: a circunsfera (Figura 4). Analogamente, o mesmo poliedro admite uma *insfera* (Figura 5), tangente às suas faces e uma *meiaesfera*, ou *interesfera* (Figura 6), que contém os pontos médios das arestas. A circunsfera, a insfera e a meiaesfera, são as esferas centrais do poliedro e, um poliedro regular está inscrito em outro se, e somente se, uma esfera central de um coincide com uma esfera central do outro.

No entanto, a inscrição poliédrica não é suficiente para garantir o engendramento entre os poliedros regulares; faz-se necessário definir a *escala*, determinada pelas esferas centrais coincidentes, e a *posição* do poliedro inscrito, determinada pela justaposição dos eixos de simetria dos poliedros regulares.

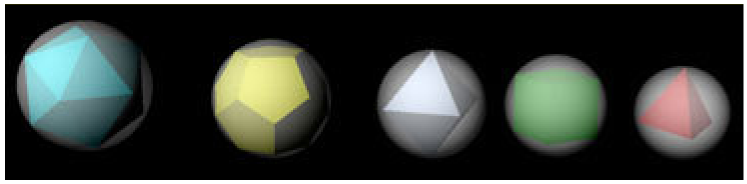


Figura 4: Circunsferas

Figura 5: Insferas

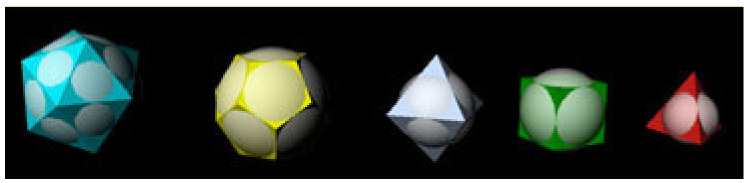


Figura 6: Meiasefera

3.2. Eixos de Simetria

A simetria é uma transformação isométrica, na qual os segmentos da figura transformada são iguais aos da figura original, podendo variar a direção e o sentido. Neste estudo nos interessa particularmente a simetria rotacional, da qual Dürer (1471-1528) se utiliza para observar as simetrias dos poliedros regulares e projetá-los segundo seus eixos.

Uma forma possui simetria rotacional quando o fixamos em uma posição e, ao rotacioná-lo em torno de um eixo, assume a mesma posição mais de uma vez. A quantidade de vezes que a imagem se repete será o número da ordem da simetria rotacional: *binária* se aparece duas vezes, ternária três vezes, quaternária quatro vezes e, quinária, cinco vezes.

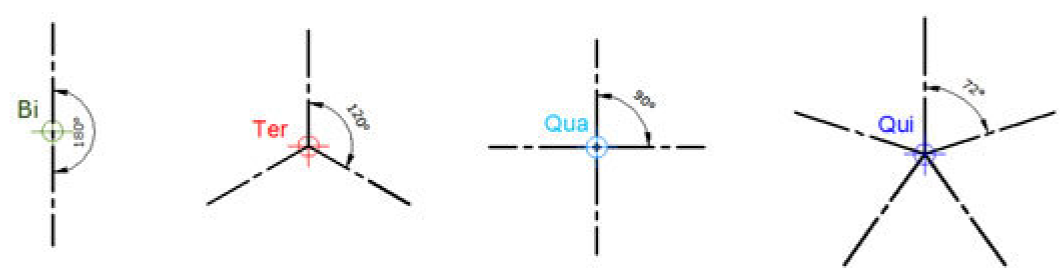


Figura 7: ângulos de rotação da simetria binária, ternária, quaternária e quinária

Cada ordem de simetria apresenta um ângulo de rotação, sendo 180°, 120°, 90°, 72°, os ângulos das simetrias binárias, ternárias, quaternárias, quinárias, respectivamente (Figura 7). Deste modo, ao dividirmos o ângulo de 360° pelo número de ordem de simetria, este será dividido em regiões para as quais não importando a posição do sólido, a imagem em cada região será a mesma. A figura 8 ilustra exemplos de simetria rotacional nos poliedros platônicos. Observamos que cada região colorida é igualmente simétrica às demais regiões.

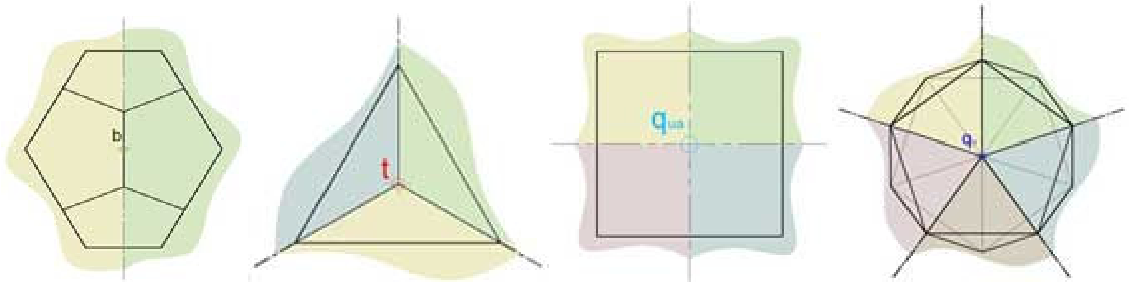


Figura 8: Exemplos de simetrias nos poliedros platônicos

Em diferentes posições um mesmo poliedro apresenta mais de um tipo de simetria, podendo o eixo passar de face a face (FF), vértice a vértice (VV) ou aresta a aresta (AA), além de, necessariamente, conter seu centro.

CORREIA & FERREIRA (2007) realizam um estudo sobre a transformação geométrica de simetria nos poliedros platônicos, com o objetivo de estabelecer a quantidade e os tipos de eixos de simetria presentes em cada uma destas formas, desenhando a tabela de elementos característicos a seguir (Tabela 1).

A partir das características de simetria e inscrição já é possível estabelecer a lei de seção de cada poliedro. Contudo, outra propriedade é imprescindível para determinar o engendramento entre os poliedros regulares: a *Dualidade*.

Tabela 1: Poliedros Platônicos: elementos característicos

Nome	V/F	F/V	F	V	A	Eixos de Simetria			
						Binário	Ternário	Quaternário	Quinário
Tetraedro	3	3	4	4	6	3 AA	4 VF	-	-
Hexaedro	4	3	6	8	12	6 AA	4 VV	3 FF	-
Octaedro	3	4	8	6	12	6 AA	4 FF	3 VV	-
Dodecaedro	5	3	12	20	30	15 AA	10 VV	-	6 FF
Icosaedro	3	5	20	12	30	15 AA	10 FF	-	6 VV

Legenda: V/F=vértices por face, F/V=faces no vértice, F=número de faces, V=número de vértices, A=número de arestas, AA=simetria aresta-aresta, VF=simetria vértice-face, VV=simetria vértice-vértice, FF=simetria face-face.

3.3. Dualidade nos Poliedros Platônicos

O princípio da Dualidade, ou multiplicidade, é decorrente dos estudos de Poncelet (sec. XIX) e segundo COSTA (1996):

"...consiste em admitir que qualquer propriedade demonstrada para uma forma de espécie E_n será automaticamente verdadeira para qualquer outro E_n, das diversas seqüências, desde que o enunciado seja adaptado ao respectivo E_0 e às espécies inferiores contidas no E_m."

Deste modo, um polígono, forma plana, pode ser definido como um *plano pontual* (espécie E_2), ou como um *plano de retas* (mesma espécie do anterior, E_2). Se consideramos como enunciado o polígono formado por quatro E_0 então, a figura obtida será dual da obtida por outro E_0; ou seja, se tomamos um *ponto* como E_0, do qual deriva-se o plano pontual, obtemos um *quadrivértice*, dual de um *quadrilátero*, cujo E_0 é *reta de um plano*, do qual deriva-se a forma plano de retas. Assim, dizemos que um quadrivértice é dual de um quadrilátero, e o número de vértices do primeiro é igual ao número de lados do segundo.

Neste estudo, a dualidade ocorre entre as formas *Espaço Pontual* e *Espaço de Planos* (ambos de espécie E_3) e, podemos definir um poliedro como um *Polivértice*, na forma Espaço Pontual, gerado por seus vértices (E_0 *ponto*), ou um *Poliedro,* propriamente dito, da forma Espaço de Planos, definido por suas faces (E_0 *plano*).

Portanto, dois poliedros são duais se o número de vértices de um é igual ao número de faces do outro e vice-versa. Observando a Tabela 1 podemos concluir quais sejam os duais de cada Poliedro Regular: Hexaedro dual do Octaedro (*Hexavértice*), Octaedro dual do Hexaedro (*Octavértice*), Dodecaedro dual do Icosaedro (*Dodecavértice*), Icosaedro dual do Dodecaedro (*Icosavértice*) e o Tetraedro como auto-dual, pois o Tetraedro é um *Tetravértice*.

4. Truncar para Engendrar

Classificamos inicialmente as truncagens em dois grupos de acordo com as propriedades de dualidade, quais sejam: entre poliedros Duais; e entre poliedros não Duais. O segundo grupo, por apresentar características distintas foi subdivido em quatro subgrupos de acordo com as propriedades de simetria e congruência, quais sejam: entre poliedros de mesma simetria; entre poliedros de simetria quaternária e quinaria; entre o tetraedro e poliedros de simetria quaternária; e entre o tetraedro e poliedros de simetria quinária[7].

Para cada grupo foi sistematizado um quadro, contendo as características de cada forma quanto aos eixos de simetria e às esferas centrais coincidentes (Quadro 1).

Quadro 1: Características para a truncagem

[7] A ordem de maior grau dos eixos de simetria de um poliedro determina a sua simetria.

Eixos de simetria	Esfera central
Quais eixos de simetria do poliedro de origem coincidem com os eixos de simetria do poliedro resultante do truncamento	Se a insfera, circunsfera, ou meiasfera do poliedro de origem coincide com alguma insfera, circunsfera, ou meiaesfera do poliedro resultante.
Lei de seção: Que elemento é cortado (**V**, **A** ou **F**) e qual a posição do plano de seção.	

Vejamos o engendramento em cada grupo:

4.1. Poliedros Duais

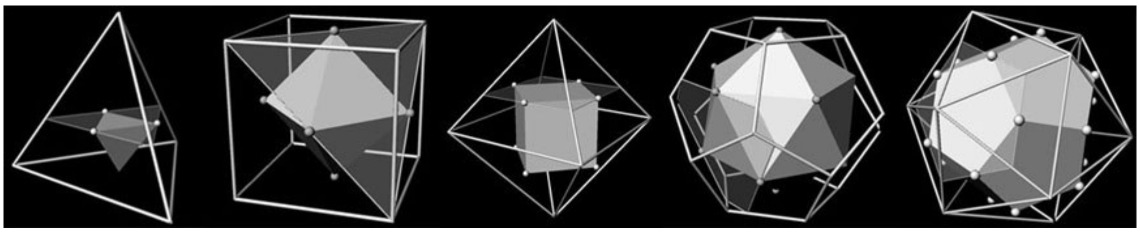


Figura 9 Planos de truncagem nos poliedros duais

Entre os poliedros duais ocorrem cinco dos 25 casos possíveis **[(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)** e, **(5)]**. A Figura 9 ilustra a posição do plano de truncagem no caso dos poliedros duais e o quadro 2, descreve as características das transformações.

O quadro 2 e a tabala 2 apresentam as características para a truncagem, entre os poliedros duais.

Quadro 2: Características para a truncagem (poliedros duais)

Eixos de simetria	Esfera central
Todos os eixos de simetria do poliedro de origem coincidem com os de mesma ordem do poliedro truncado.	A insfera do poliedro original será a circunsfera do poliedro truncado, já que os centros das faces do primeiro coincidem com os vértices do segundo.
Lei de seção: Cada plano de seção trunca o vértice e é determinado pelos centos das faces que formam um ângulo sólido. O centro de cada face do poliedro de origem corresponde a um vértice do poliedro truncado. O plano de seção sempre será perpendicular ao eixo de simetria **VV** ou **VF**, no caso do tetraedro.	

Tabela 2: Poliedros duais (Características da truncagem)

Engendramento	Eixos de Simetria	Esferas	Relação F/V/A	Plano de Truncagem		
				Trunca	Passa por	Quant.
(1)Tetra-Tetra	Todos (≡)	Ins≡Cir	$F \subset V$	V	Centros das faces de um ângulo sólido.	4
(2)Hexa-Octa						8
(3)Octa-Hexa						6
(4)Dodeca-Icosa						20
(5)Icosa-Dodeca						12

4.2. Poliedros Não Duais

São vinte os casos possíveis entre os poliedros não duais. Entretanto, observamos neste grupo poliedros com características distintas em relação aos eixos de simetria. Todos os poliedros regulares convexos possuem eixos de simetria binária e ternária. O tetraedro possui apenas estes dois tipos, sendo **AA** (binário) e **VF** (ternário). Os demais possuem ainda ou eixos quaternários ou quinários, que lhes conferirá a ordem, de maior grau. Do exposto, estabelecemos os quatro subgrupos, para melhor observar as características do engendramento.

4.2.1. Poliedros com eixo de simetria de mesma ordem

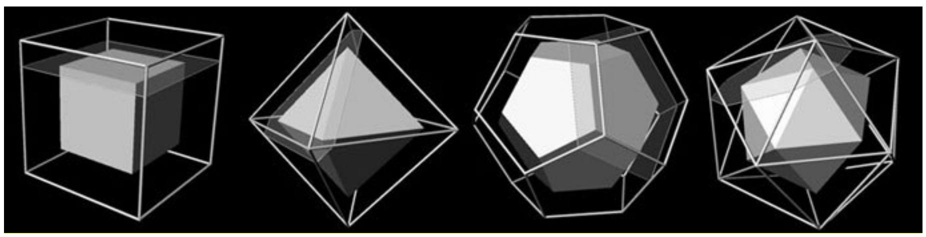


Figura 10: Planos de truncagem nos poliedros não duais, com eixo de simetria de mesma ordem

Entre os não-duais, os pares de poliedros que possuem mesma ordem de simetria é formado por dois poliedros do mesmo tipo **[(6)** ,**(7)**; **(8),** e, **(9)]** (Figura 10). Como a natureza do poliedro truncado é a mesma do poliedro de origem, todas as suas propriedades serão preservadas e, o número de faces, vértices e arestas será o mesmo. Os poliedros mantêm relação de homotetia direta. O quadro 3 apresenta as características gerais do grupo e a tabela 3, as especificidades das truncagens realizadas.

Quadro 3: Características: poliedros não duais (eixo de simetria de mesma ordem)

Eixos de simetria	Esfera central
Todos os eixos de simetria do poliedro de origem coincidem com os do poliedro resultante, por se tratar de sólidos de mesma natureza.	Todas as esferas centrais do sólido truncado terão escala menor que a esfera central correspondente do poliedro de origem, podendo sua insfera coincidir com a circunsfera ou meiasfera do sólido resultante.
Lei de seção: Como cada face do poliedro de origem corresponde a uma face semelhante do poliedro truncado, cada plano de seção corta o sólido paralelamente às faces e, para cada caso, são realizadas tantas seções quantas sejam as faces do poliedro.	

Tabela 3: Poliedros com eixo de simetria de mesma ordem (Características da truncagem)

Engendramento	Eixos de Simetria	Esferas	Relação F/V/A	Plano de Truncagem		
				Corta	Passa	Quant.
(6)Hexa-Hexa	Todos (≡)	Não existem particularidades	Homotéticos	Face	Paralelo a face	6
(7)Octa-Octa						8
(8)Dod.-Dod.						12
(9)Icosa-Icosa						20

4.2.2. Poliedros de Eixo de Simetria de Ordem Quaternária e Quinária

Dois poliedros platônicos possuem eixos quaternários e dois possuem eixos quinários, o que corresponde a oito transformações **[(10)**, **(11)**, **(12)**, **(13)**, **(14)**, **(15)**, **(16)** e, **(17)]**.

O quadro 4 apresenta as características dos eixos de simetria e da esfera central para este grupo, e a lei de seção será, a seguir, descrita para cada caso, uma vez que o plano de seção não é, necessariamente, perpendicular a algum eixo de simetria e, deste modo, cada caso requer uma lei de seção específica.

Quadro 4: Características: poliedros não duais

Eixos de simetria	Esfera central
Os três eixos de simetria de ordem quaternária do hexaedro, assim como os do octaedro, são perpendiculares entre si. Dentre os eixos de simetria dos poliedros de ordem quinária (binários, ternários e quinários), apenas a simetria binária apresenta tríades com a mesma característica. Inscrevendo um poliedro de ordem quaternária em um de ordem quinária, de modo que os eixos quaternários do primeiro coincidam com uma das tríades de eixos binários do segundo, os quatro eixos ternários do primeiro coincidem com quatro dos dez eixos ternários do segundo.	Nas transformações entre poliedros com eixos de simetria de menor ordem para os de maior ordem, as insferas do poliedro de origem coincidem no poliedro resultante: com a **insfera**, se os eixos coincidentes forem do tipo **FF**; **circunsfera**, se forem do tipo **VV** e, **meiaesfera**,se for do tipo **AA.** Nas transformações entre poliedros de simetria de maior para os de menor ordem, as circunsferas dos poliedros resultantes coincidirão nos poliedros de origem com: a circunsfera, se os eixos coincidentes forem do tipo **VV;** insfera, se forem do tipo **FF**; e meiasfera, se forem do tipo **AA.**

- **Leis de seção**

- ***Hexaedro para Dodecaedro (10):***

O número de arestas do hexaedro é o mesmo que o de faces do dodecaedro e, cada aresta truncada no hexaedro produz uma face do dodecaedro. O eixo binário do dodecaedro é do tipo **AA** e o eixo quaternário do hexaedro do tipo **FF**; assim, seis arestas do dodecaedro pertencem às seis faces do hexaedro. Os pontos médios das arestas coincidem com os centros das faces, uma vez que a meiaesfera do dodecaedro coincide com a insfera do hexaedro.

Os 12 planos de truncagem, paralelos às arestas do hexaedro, são definidos na seção de cada ângulo diédrico do hexaedro, por duas retas. A primeira passa pelo centro de uma das faces, paralela à aresta e, a segunda, forma com a outra face, um ângulo medindo o complemento da metade do ângulo diédrico do dodecaedro (figura 11).

Figura 11: Hexaedro para dodecaedro

- ***Hexaedro para Icosaedro (11):***

A soma do número de arestas com o número de vértices do hexaedro é igual ao número de faces do icosaedro; logo, na truncagem, cada vértice e aresta do hexaedro produzem uma face do icosaedro.

São necessários dois tipos de seção. No primeiro, o plano é o mesmo da transformação do hexaedro para dodecaedro, mudando apenas a medida do complemento da metade do ângulo diédrico do dodecaedro para a do icosaedro. Como resultado desta truncagem obtemos um dodecaedro irregular. No segundo tipo, o plano trunca o vértice do dodecaedro irregular, perpendicularmente ao eixo ternário do hexaedro, e passa por três vértices pertencentes às arestas que determinam o ângulo sólido do dodecaedro. São necessários 20 planos de seção, sendo 12 do primeiro tipo (arestas) e 8 do segundo tipo (vértices) (figura 12).

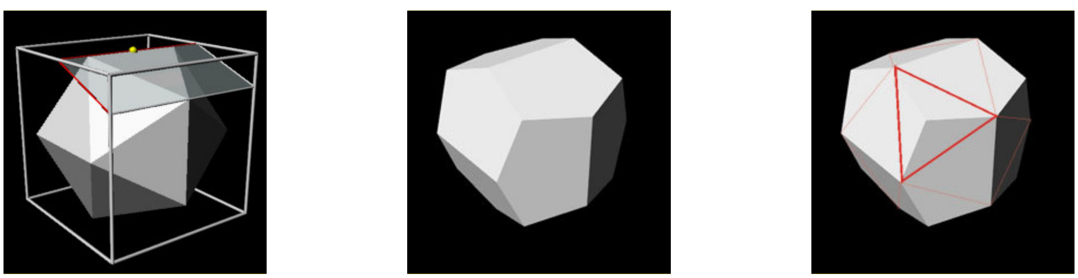


Figura 12: Hexaedro para Icosaedro

- ***Octaedro para Dodecaedro (12):***

A exemplo do hexaedro, o octaedro possui número de arestas igual ao número de faces do dodecaedro; assim, cada aresta produz uma face do dodecaedro. O centro de cada face do octaedro define 8 vértices do dodecaedro, já que a insfera do octaedro coincide com a circunsfera do dodecaedro. Cada um dos 12 planos de seção trunca a aresta do octaedro passando pelos centros de duas faces adjacentes e formando com seu eixo quaternário, a metade da medida do ângulo diédrico do dodecaedro (figura 13).

Figura 13: Octaedro para Dodecaedro

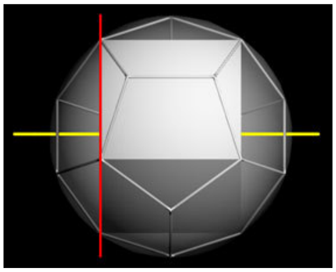
- ***Octaedro para Icosaedro (13):***

Os eixos ternários do octaedro e do icosaedro são do tipo **FF**. Na transformação, 8 faces do icosaedro pertencem às faces do octaedro, tendo seus centros coincidentes. Como o número de arestas do octaedro é igual ao número de vértices do icosaedro, cada vértice pertencerá a uma aresta do primeiro. Dois planos de seção truncam cada vértice, paralelos a um eixo quaternário do octaedro que não seja o vértice truncado, formando um ângulo, cuja medida é igual ao ângulo diédrico do icosaedro (figura 14), sendo 12 a quantidade de seções necessárias. Entretanto, tais características do plano são insuficientes para determinar a lei de seção, visto não termos, ainda, identificado um dado métrico que restrinja a posição do plano. Para a obtenção do engendramento, como na figura 12, escalamos o icosaedro em relação ao octaedro, de modo que, os centros das 8 faces do icosaedro, que definem os três eixos ternários coincidentes nos dois poliedros, incidissem nos centros das faces do octaedro.

Figura 14: Octaedro para Icosaedro

- **Dodecaedro para Hexaedro (14):**

Na truncagem, cinco arestas do dodecaedro devem corresponder a uma face do hexaedro. Este fato é reforçado pela justaposição dos eixos quaternários do hexaedro aos três eixos binários do dodecaedro. Cada um dos 6 planos de seção trunca uma aresta perpendicularmente a um eixo binário do dodecaedro e contém a diagonal do pentágono paralela à esta aresta (figura 15).



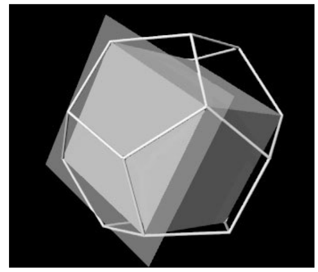
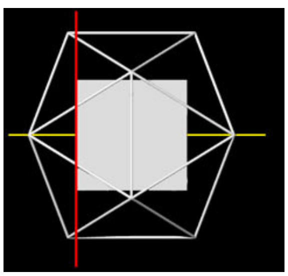


Figura 15: Dodecaedro para Hexaedro

- ***Icosaedro para Hexaedro (15):***

Considerando a dualidade entre vértice e face, mantém-se as observações da trucagem anterior. Assim, os vértices do hexaedro coincidem com os centros das oito faces por onde passam as tríades de eixos ternários. Cada um dos 6 planos de seção trunca uma aresta perpendicularmente a um eixo binário do icosaedro e passa pelos centros das faces que correspondem aos eixos de simetria ternária coincidentes.



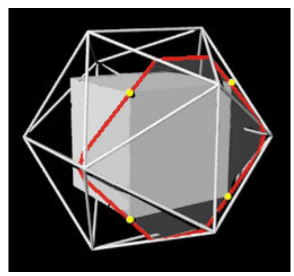
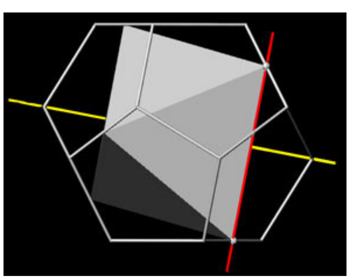


Figura 16: Icosaedro para Hexaedro

- **Dodecaedro para Octaedro (16):**

Na transformação, os vértices do octaedro coincidem com os pontos médios das arestas do dodecaedro por onde passam os eixos justapostos. Cada um dos 8 planos de seção trunca um vértice perpendicularmente a um dos eixos ternários coincidentes do dodecaedro, e contém o ponto médio de uma das arestas por onde passa um dos eixos das tríades binárias (figura 17).



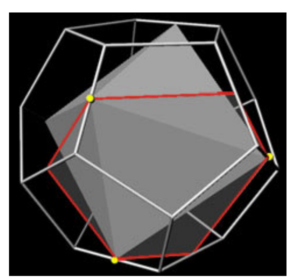


Figura 17: Dodecaedro para Octaedro

- ***Icosaedro para Octaedro (17):***

Apenas observando o princípio da dualidade, o mesmo tipo de transformação ocorre neste caso, tendo, como elemento truncado, a face ao invés do vértice.

Cada um dos oito planos de seção trunca uma face perpendicularmente a um dos eixos ternários coincidentes, do icosaedro, e contém o ponto médio de uma das arestas por onde passa um dos eixos das tríades binárias (figura 18).

Figura 18: Icosaedro para Octaedro

A tabela 4 apresenta o resumo com todas as características no engendramento entre os poliedros de ordem quaternária e quinária.

Tabela 4: Poliedros de ordem quaternária e quinária (Características da truncagem)

Engendramento	Eixos de Simetria	Esferas	Relação F/V/A	Plano de Truncagem: Corta	Plano de Truncagem: Passa por	Plano de Truncagem: Quant.
(10)Hexa-Dodeca	Qua≡Bi Ter≡4Ter	Ins≡Meia	F⊂6A	A	Centro de face	12
(11)Hexa-Icosa				1°- A 2°- V	(1)Centro de Face (2)Vértices do Dod. irregular.	20
(12)Octa-Dodeca		Ins≡Cir	F⊂8V	A	Centros de faces	12
(13)Octa-Icosa		Ins≡Ins	F⊂8F A⊂V	2x V	Paralelo a eixo quaternário	12
(14)Dodeca-Hexa	Bi≡Qua 4Ter≡Ter	Cir≡Cir	8V≡V F⊂A	A	Vértices	6
(15)Icosa-Hexa		Ins≡Cir	8F⊂V		Centros de faces	6
(16)Dodeca-Octa		Meia≡Cir	6A⊂V	V	Pontos médios de arestas	8
(17)Icosa-Octa				F		8

4.2.3. O tetraedro e os poliedros de eixo quaternário

Quatro transformações são possíveis, uma vez que são apenas dois os poliedros platônicos de eixo quaternário **[(18)**, **(19)**, **(20)** e, **(21)]**. O quadro 5 apresenta as características dos eixos de simetria e da esfera central para este grupo.

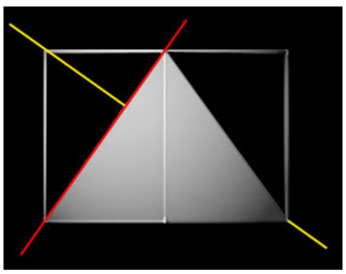
Quadro 5: Características: o tetraedro e os poliedros de eixo quaternário

Eixos de simetria	Esfera central
Os eixos binários do tetraedro coincidem com os quaternários do hexaedro e do octaedro; também são coincidentes os eixos ternários de ambos coincidem.	O número de faces do tetraedro é igual ao número de vértices ou de faces do poliedro de ordem quatro. A insfera do tetraedro será a circunsfera do truncado quando o número de faces for igual ao número de vértices, meiaesfera igual ao número de arestas, e insfera, igual ao número de vértices.

- **Leis de seção**

- ***Hexaedro para Tetraedro (18):***

Os eixos quaternários do hexaedro são do tipo **FF**; os binários do tetraedro são do tipo **AA** e os eixos ternários dos dois são do tipo **VV.** As arestas do tetraedro devem coincidir com as diagonais das faces do hexaedro, na transformação. Como o hexaedro possui o dobro de vértices do tetraedro, 4 dos seus vértices coincidem com os vértices do tetraedro. Neste caso, 4 planos truncam 4 vértices não adjacentes do hexaedro, perpendicularmente ao seu eixo ternário, passando pelos centros das faces que determinam o ângulo sólido.



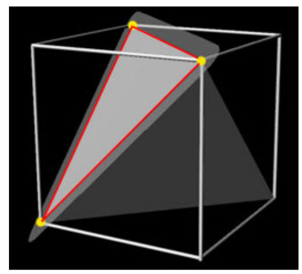
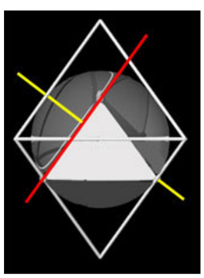


Figura 19: Hexaedro para Tetraedro

- ***Octaedro para tetraedro (19):***

O número de faces do octaedro é o dobro do número de faces e de vértices do tetraedro e seus eixos ternários são coincidentes. Na transformação, cada vértice do tetraedro pertence a uma face do octaedro, no seu centro, definindo, 3 a 3, 4 planos de seção, paralelos a quatro faces distintas do octaedro (figura 20).



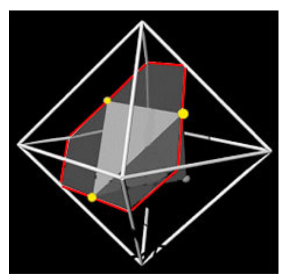


Figura 20: Octaedro para Tetraedro

- ***Tetraedro para Octaedro (20):***

Cada vértice do octaedro coincide com os pontos médios das arestas do tetraedro e, cada face do octaedro corresponde a uma face ou a um vértice do tetraedro. Deste modo, cada um dos 4 planos de seção trunca um vértice do tetraedro passando pelos pontos médios das arestas do ângulo sólido (figura 21).

Figura 21: Tetraedro para Octaedro

- ***Tetraedro para hexaedro (21):***

Essa transformação apresenta as mesmas características da anterior, mantendo-se o princípio da dualidade no espaço. Como os eixos binários do tetraedro (**AA**) coincidem com os quaternários do hexaedro (**FF**), teremos que de cada aresta obter uma face. Logo, cada um dos 6 planos de seção trunca uma aresta do tetraedro perpendicularmente ao seu eixo binário, passando pelos centros das faces adjacentes à aresta (figura 22).

Figura 22: Tetraedro para Hexaedro

A tabela 5 apresenta o resumo das características no engendramento entre o tetraedro e os poliedros de ordem quaternária.

Tabela 5: O tetraedro e os poliedros de eixo quaternário (Características da truncagem)

Engendram.	Eixos de Simetria	Esferas	Relação F/V/A	Plano de Truncagem		
				Corta	Passa por	Quant.
(18)Hexa-Tetra	Ter≡ Ter Qua ≡ Bi	Ins ≡ Ins Cir ≡ Cir	F⊂A V ≡ V	V	3 V do Hexa	4
(19)Octa-Tetra		Ins ≡ Cir	4F⊂V	F	Centro de faces	4
(20)Tetra-Octa	Ter≡ Ter Bi ≡ Qua	Ins ≡ Ins Meia ≡ Cir	F⊂4F A⊂V	V	Pontos médios de arestas	4
(21)Tetra-Hexa		Ins ≡ Cir	F⊂4F	A	//A, centro de faces	6

4.2.4. O tetraedro e os poliedros de Eixo Quinário

Também neste caso, são quatro as possíveis transformações, uma vez que apenas dois dos poliedros platônicos possuem simetria quinária **[(22)**, **(23)**, **(24)** e, **(25)]**.

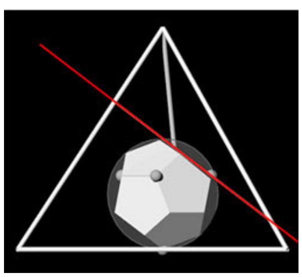
Quadro 6: Características: o tetraedro e os poliedros de eixo quaternário

Eixos de simetria	Esfera central
O número de arestas do tetraedro é múltiplo do número de arestas dos poliedros de ordem quinária, os eixos binários do tetraedro coincidem com 3 dos 15 eixos binários dos de ordem quinária. Como o número de faces e vértice do tetraedro é múltiplo do número de vértices do dodecaedro e número de faces do icosaedro, os eixos ternários do tetraedro coincidem com 4 dos 10 eixos ternários dos de ordem quinária.	Na transformação do tetraedro para poliedros de ordem quinária, as insferas coincidem com insferas ou circunsferas, uma vez que os eixos ternários do tetraedro são **VF**, e **FF** ou **VV**, nos poliedros de ordem quinária. Nas inversas, a circunsfera do poliedro obtido coincide com a insfera ou circunsfera do poliedro original, uma vez que os eixos ternários do tetraedro são **VF**, e nos de ordem quinária são **FF** ou **VV**.

- **Leis de seção**

- ***Tetraedro para Dodecaedro (22):***

Como o eixo ternário do tetraedro é do tipo **VF** e o do dodecaedro do tipo **VV** (eixos coincidentes), quatro dos vértices do dodecaedro coincidem com os centros das faces do tetraedro e, outros quatro pertencem aos eixos ternários coincidentes. Cada vértice do tetraedro é truncado simultaneamente por três planos que passam, cada um, pelo centro de uma face do tetraedro e formam um ângulo triédrico igual ao ângulo sólido do dodecaedro (figura 23). Doze planos são necessários nesta truncagem.



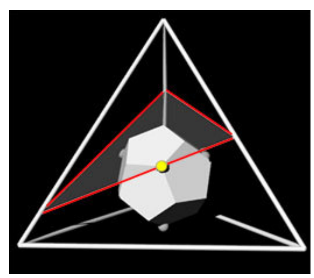


Figura 23: Tetraedro para Dodecaedro

- ***Tetraedro para Icosaedro (23):***

Essa transformação terá as mesmas características da anterior, mantendo-se o princípio da dualidade no espaço. O eixo ternário do tetraedro é do tipo **VF** e o do icosaedro do tipo **FF**, quatro das faces do icosaedro pertencem às faces do tetraedro, com centros coincidentes. Os centros de outras quatro faces pertencem aos eixos ternários coincidentes. Cada vértice do tetraedro é truncado simultaneamente por três planos que passam, cada um, pelo centro de uma face do tetraedro e formam com o seu eixo ternário, um ângulo cuja medida é igual ao ângulo diédrico do dodecaedro, menos 90°. Neste processo, obtemos um hexadecaedro irregular. Para engendrar o icosaedro regular truncamos os vértices do hexadecaedro por onde passam os eixos ternários do tetraedro, por planos perpendiculares a eles, e que passam por três vértices pertencentes às arestas que determinam o ângulo sólido do hexadecaedro. Dezesseis planos de seção são necessários nesta truncagem (figura 24).

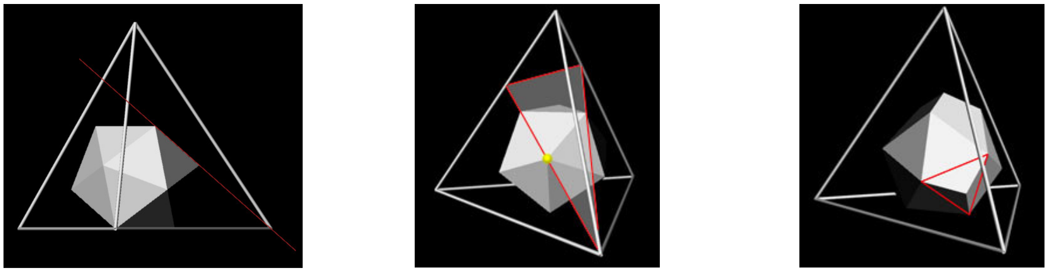


Figura 24: Tetraedro para Icosaedro

- ***Dodecaedro para tetraedro (24)***

Como os dois poliedros possuem eixos ternários coincidentes, os vértices do tetraedro coincidem com vértices do dodecaedro e cada um dos 4 planos de seção trunca um vértice do dodecaedro, passando por três vértices que pertencem a uma tríade de eixos ternários (figura 25).

Figura 25: Dodecaedro para Tetraedro

- ***Icosaedro para Tetraedro (25):***

Essa transformação terá as mesmas características da anterior, mantendo-se o princípio da dualidade no espaço. Deste modo, cada um dos 4 planos de seção trunca uma face, ao invés de um vértice, e é definido pelos centros das faces por onde passam os eixos ternários coincidentes do icosaedro (figura 26).

Figura 26: Icosaedro para Tetraedro

A tabela 6 apresenta o resumo com todas as características no engendramento entre o tetraedro e os poliedros de ordem quinária.

Tabela 6: O tetraedro e os poliedros de ordem quinária (Características da truncagem)

Engendramento	Eixos de Simetria	Esferas	Relação F/V/A	Plano de Truncagem		
				Corta	Passa por	Quant.
(22)Tetra-Dodeca	Ter≡4Ter Bi≡3Bi	Ins≡Cir	F⊂4V	V	Centros de faces	12
(23)Tetra-Icosa		Ins≡Ins	F⊂4F	(1) A (2) V	(1) V ; (2) V do hexadecadero	16
(24)Dodeca-Tetra	4Ter≡Ter 3Bi≡Bi	Cir≡Cir	V≡V	V	Vértices	4
(25)Icosa-Tetra		Ins≡Cir	4F⊂V	F	// F; centro de face	4

5. Considerações Finais

O estudo realizado nos permitiu analisar as características de cada transformação entre pares de poliedros platônicos, tendo em vista a possibilidade de estabelecimento de uma lei de seção. Na sua impossibilidade, apresentamos os resultados obtidos e as particularizações necessárias para cada caso, com relação às características que definimos para balizar a pesquisa: eixos de simetria e esfera central.

Com relação aos eixos de simetria:

a. Nas transformações entre poliedros duais e poliedros com eixo de simetria de mesma ordem, todos os eixos de mesma simetria são coincidentes;

b. Em qualquer transformação 4 eixos ternários de um poliedro são coincidentes com os eixos de mesma simetria no outro poliedros;

c. Nas transformações entre poliedros de simetria quaternária e qualquer outro poliedro regular convexo, os eixos quaternários são coincidentes com uma tríade de eixos binários, perpendiculares entre si, do outro poliedro;

d. Em nenhuma das transformações os eixos de simetria quinária são coincidentes com outros eixos de simetria.

e. Foram utilizadas tríades de eixos perpendiculares entre si (figura 27) correspondentes aos eixos quaternários ou binários e tétrades de eixos formando 70°31’48’’ entre si (Figura 28) correspondente aos eixos ternários.

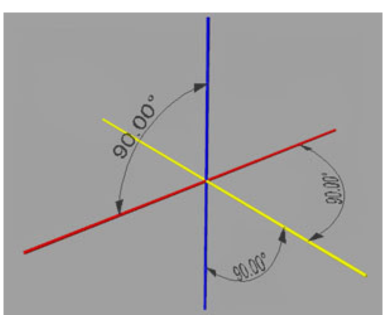


Figura 27: Tríade de eixos

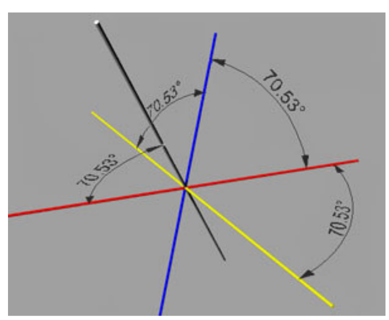


Figura 28: Tétrade de eixos

Porém, encontramos entre os eixos de simetria de mesma ordem vários ângulos, que constituem diferentes *políades axiais;* ou seja, conjunto de eixos de simetria de mesma ordem que formam entre si o mesmo ângulo. A tabela 7 especifica os diferentes ângulos presentes nas simetrias, bem como a ordem das políades presentes em cada uma delas.

Justificamos, assim, as considerações anteriores, visto só haver possibilidade de coincidência de eixos entre as políades de mesma ordem e mesmo ângulo, o que explica a inexistência de coincidência dos eixos de simetria quinária (do dodecaedro e do icosaedro) e de simetria binária do hexaedro, com qualquer eixo de simetria de outro poliedro convexo.

Tabela 7: Características dos Platônicos quanto ao ângulo e políade axial

Simetria	Bin		Ter		Qua	Qui
Ângulo	90°	60°	70°31'48''	41°48'36''	90°	63°27'36''
Tetraedro	1 tríade	-	1 tríade	-	-	-
Hexaedro	3 díades	pêntade*	1 tríade	-	1 tríade	-
Octaedro	3 díades	pêntade*	1 tríade	-	1 tríade	-
Dodecaedro	5 tríades	pêntade*	Tríades*	tríades*	-	1 héxade
Icosaedro	5 tríades	pêntade*	Tríades*	tríades*	-	1 héxade
*alguns dos eixos das políades se sobrepõem						

Com relação à esfera central, todas as considerações que seguem não são válidas para as truncagens entre poliedro de mesma natureza:

a. Nas transformações em que o poliedro de origem é o tetraedro, hexaedro ou octaedro, será a insfera a coincidir com a esfera central do poliedro resultante;

b. Nas transformações entre poliedros de simetria quinária para qualquer outro, esfera central do poliedro resultante será a circunsfera;

c. Nas transformações entre o tetraedro e os poliedros de simetria quaternária para outro poliedro regular convexo, será a insfera a coincidir com a esfera central do poliedro resultante;

d. Nas transformações dos poliedros regulares convexos para o tetraedro ou hexaedro, a esfera central do poliedro resultante será a circunsfera;

e. A meiasfera só aparece nas transformações entre poliedros de simetria quinária para octaedro e entre o hexaedro para o tetraedro e poliedros de simetria quinária.

Para a definição das leis de seção percebemos, nas transformações, diferentes tipos de truncagens, que classificamos quanto ao elemento truncado; quais sejam:

I. *Truncagem de Vértice*: o plano de seção remove o vértice de um ângulo poliedro, cortando suas arestas, perpendicular (a) ou obliquamente (b), em relação ao eixo de simetria **VV**.

a) Ocorre nos casos (1), (2), (3), (4), (5), (11), (18), (20), (22), (23) e (24).

b) Ocorre nos casos (13) e (23).

II. *Truncagem de Face*: o plano de seção remove uma face do poliedro, cortando arestas dos ângulos poliédricos que possuem vértices nesta face. Nos casos estudados encontramos apenas seções perpendiculares (a) ao eixo de simetria.

a) Ocorre nos casos (1), (6), (7), (8), (9), (17), (19) e (25).

III. *Truncagem de Aresta*: o plano de seção remove uma aresta do poliedro, cortando arestas de dois ângulos poliédricos que possuem vértices nesta aresta, perpendicular (a) ou obliquamente em relação ao eixo de simetria que passa no seu ponto médio. Sendo obliquo em relação ao eixo, o plano pode ser paralelo (b) ou oblíquo (c) à aresta truncada:

a. Ocorre nos casos (21), (14), (15);

a. Ocorre no caso (12);

b. Ocorre nos casos (10) e (11).

Finalmente, consideramos que o engendramento entre os poliedros platônicos, através de truncagens possibilita, através da propriedade de simetria, maior facilidade de sua representação e, conseqüentemente, melhor utilização nas suas aplicações. Além disso, acreditamos que as características apontadas podem levar a outros estudos sobre o tema, inclusive buscando a simplificação do processo e sua utilização para o engendramento dos poliedros semi-regulares, bem como no estudo das malhas poliédricas e seus nós.

REFERÊNCIAS

BERTATO, Fábio Maia. **"De Divina Proportione" de Luca Pacioli**: Tradução anotada e comentada. Tese (Doutorado em Filosofia) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, 2008.

CORREIA, Ana Magda Alencar; FERREIRA, Bruno Leite. Poliedros platônicos: Dualidade Simétrica. In: **ANAIS Graphica, 2007**, Curitiba: Departamento de Desenho - UFPR, 2007. v. 1.

CORREIA, Ana Magda Alencar; FERREIRA, Bruno Leite. Truncar para Engendrar. In: **ANAIS Graphica, 2009**, Bauru: Universidade Estadual Paulista - UNESP, 2009. v. 1.

COSTA, Mario Duarte, COSTA, Alcy P. de A. V. **Geometria gráfica tridimensional**. v3. Recife: Editora da Universidade Federal de Pernambuco, 1996.

História da geometria. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/amm/paginas/ 231_249.pdf>. Acessado em: 20 fevereiro 2006.

MARMOL, L. Sanchez; BEATO, M. Perez. **Geometría métrica proyectiva y sistemas de representación**. 2 ed. Tomo 2. Madrid: SAETA, 1947.1413 p.

RANGEL, Alcyr Pinheiro. **Poliedros**. Rio de Janeiro: LTC, 1982. 71 p.

SÁ, Ricardo. **Edros**. São Paulo: Projeto Editores Associados, 1982. 121 p.