EDUCAÇÃO GRÁFICA

PROPORÇÕES E ESTRUTURAS DA GEOMETRIA SAGRADA NA ANTIGUIDADE

Maria Antonia Benutti[1]

Resumo

Este trabalho busca estudar as principais relações de proporções geométricas, tais como, a Proporção Áurea, Vesica Piscis, Ad Quadratum e o Ad Triangulum, utilizadas na geometria sagrada na antiguidade, de modo a contemplar as leis de harmonia e proporção.

Palavras-chave: Arquitetura, geometria, projeto.

Abstract

This work aims at studying the principal relations of geometric proportions, such as Golden Proportion, Vesica Piscis, Ad Quadratum and Ad Triangulum, used in Sacred Geometry in Ancient Times, in order to comtemplate the laws of harmony and proportion.

Key words: Architecture, geometry, design.

1. Introdução

A geometria – termo que significa 'a medição da terra' – talvez tenha sido uma das primeiras manifestações da civilização em seu nascedouro. Instrumento fundamental que subjaz a tudo o que é feito pelas mãos humanas, a geometria desenvolveu-se

[1] Professora doutora, Faculdade de Arquitetura, Artes e Comunicação - Universidade Estadual Paulista, Av. Edmundo Carrijo Coube, mariabenutti@faac.unesp.br / mariabenutti@hotmail.com

> de uma habilidade primitiva – a manipulação da medida, que nos tempos antigos era considerada um ramo da magia. Naquele período antigo, a magia, a ciência e a religião eram de fato inseparáveis, faziam parte do conjunto de habilidades possuídas pelo sacerdócio. p.7 [1]

A organização do nosso mundo físico está diretamente ligada ao mundo cósmico. Os fenômenos e variáveis como o tempo, o espaço, a cor, a luz, o som, podem ser expressos em termos de freqüência de vibração e a relação entre eles expressa por meio de proporções.

Essas proporções também são encontradas na natureza e se manifestam em formas geométricas (casas de abelhas, espirais das conchas de moluscos, estruturas de galhos nas árvores, entre outras).

Os construtores antigos conheciam as leis de harmonia e proporção e as usavam nos templos e nas catedrais. Assim, esses monumentos foram posicionados e projetados segundo uma posição e geometria específicas, para que pudessem refletir no mundo físico (micro universo) formas e proporções correspondentes ao mundo cósmico (macro universo). Das proporções utilizadas nas estruturas religiosas, a razão áurea é um dos exemplos mais conhecido de proporção ideal, usada na arquitetura sagrada e na arte desde o antigo Egito.

A relação entre o micro e o macro cosmo foi explorada pelos construtores de todas as estruturas religiosas, do paganismo ao cristianismo, tanto no oriente como no ocidente. E a presença da geometria, denominada sagrada, se reflete em todas estas construções de forma muitas vezes explícita, como nos círculos de pedras, nas pirâmides, no Parthenon, na Catedral de Chartres, na de St. Denis e na maioria das catedrais góticas.

O objetivo principal da utilização da geometria sagrada nas construções e estruturas sagradas era a busca da harmonia, pois a aplicação dos símbolos geométricos sagrados possibilitavam inserir o homem em um sistema rítmico e harmônico semelhante ao ritmo e harmonia naturais. E, acreditava-se que se o homem vivesse e experimentasse corretamente o produto da observação dos símbolos sagrados, poderia sustentar a harmonia como se estivesse afinando-a com a harmonia da criação [1].

Segundo Rubino [2], o antigo Egito demonstrou um extraordinário conhecimento do poder evocatório dos símbolos geométricos e de seus códigos, que mantidos rigorosamente secretos, eram usados na arquitetura dos templos, nos hieróglifos, nos baixos-relevos, nas pinturas e nos desenhos reproduzidos nos papiros. Tais conhecimentos foram passados através dos tempos por sociedades secretas como as de origens maçônicas ou *misteriosóficas*.

Assim, essas estruturas sagradas foram os representantes físicos desses conhecimentos. E os mestres maçons e arquitetos, os depositários desses segredos.

Os conhecimentos e a utilização da geometria sagrada são apresentados em vários tratados de arquitetura. O mais famoso, "De Architectura” de Vitrúvius - redescoberto pelos arquitetos do Renascimento após quase um milênio de esquecimento - tornou-se a principal obra consultada por eles.

A aplicação universal de princípios geométricos idênticos em lugares separados pelo tempo e crenças - pirâmides e templos do antigo Egito, Templos Maias, Tabernáculos Judaicos, Zigurates Babilônicos, Mesquitas Islâmicas e Catedrais Cristãs - atestam a natureza, de certa forma transcendental, que conectam como um fio invisível essas estruturas por princípios imutáveis da geometria sagrada.

Embora presentes em quase toda estrutura religiosa construída pelos antigos, os princípios da geometria sagrada, nos tempos modernos, foram relegados primeiramente à esfera estreita do desenho de edifícios sagrados e depois, quase que completamente abolidos em razão de objetivos práticos.

Entretanto, ainda é possível perceber sua presença no mundo materialista do século XX e XXI em obras e projetos de artistas, artesãos, designers e arquitetos, como Jean Puiforcat, Le Corbusier e Keith Critchlow que buscaram harmonia em suas criações por meio da aplicação dos sistemas canônicos antigos de geometria e de proporção.

2. Princípios da geometria sagrada

Os princípios da geometria sagrada aparecem em toda a história da humanidade, não apenas nos artefatos construídos pelo homem, mas principalmente na natureza, onde o homem foi buscá-los. Esses princípios estão relacionados com a proporção e a harmonia.

Os Sumérios foram os primeiros a estudá-los e utilizá-los. A partir da civilização Suméria a geometria sagrada se difundiu em três ramos distintos pela Índia, Arábia e Egito.

A geometria sagrada baseia-se no conceito de proporção harmônica e, as figuras podem ser desenhadas ou criadas usando uma linha reta (com uma régua não graduada) e um compasso. Ela não determina dimensões e depende somente da proporção. Torna-se conveniente estabelecer uma distinção entre as proporções e as dimensões: enquanto estas indicam simplesmente altura, largura e comprimento, as proporções dizem respeito às relações entre as partes que seguem uma determinada lei.

Para Vitruvius [3] a proporção se define por uma harmonia agradável entre as partes e o todo. Ao apontar as necessidades para a boa concepção de templos, em seu "Livro III", indica a importância da utilização das regras de simetria e da proporção assinalando a diferença entre as duas ao destacar que a simetria surge da proporção.

As definições de proporção e simetria, apresentadas por Vitrúvius, estão relacionadas com a harmonia, e para muitos autores, está atrelada ao conceito de belo.

3. As principais proporções e desenhos utilizados na geometria sagrada.

Os conceitos e desenhos apresentados a seguir são os mais presentes nas construções e artefatos, sagrados ou não, utilizados desde o antigo Egito.

3.1 O quadrado raiz de 2

Os lados do quadrado AEFC são iguais a diagonal do quadrado ABCD (o primeiro quadrado). A área do segundo quadrado é igual ao dobro da área do primeiro.

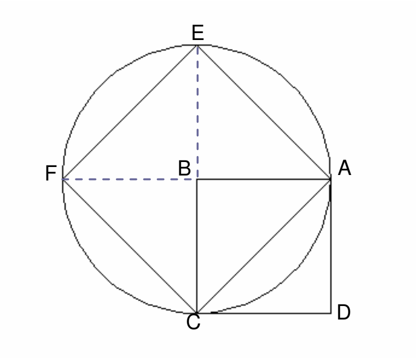


Figura 1: quadrado √2

Se considerarmos o lado equivalente a uma raiz quadrada, o lado do primeiro quadrado (quadrado 1) será √1, e a do quadrado 2 será √2. A diagonal do quadrado 2 é igual a 2, pois é duas vezes o lado do quadrado 1. Em termos matemáticos essa relação pode ser escrita como:

$$\frac{\text{Lado 1}}{\text{diag 1}} : \frac{\text{lado 2}}{\text{diag 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

A construção de novos quadrados a partir da diagonal do anterior gera uma seqüência de quadrados (4, 5, 6, ...) onde, a relação do lado para a diagonal em cada quadrado e, de cada quadrado para o próximo, é idêntica àquela do quadrado 1 para o quadrado 2 e podem ser escritas como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{2}{2\sqrt{2}} : \frac{2\sqrt{2}}{4} : \frac{4}{4\sqrt{2}} : \frac{4\sqrt{2}}{8} : \ldots.$$

Este tipo de progressão caracteriza uma progressão geométrica. A progressão geométrica pode ser representada graficamente como na figura 2.

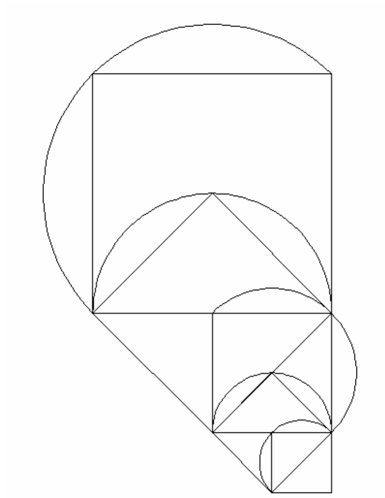


Figura 2: Seqüência de quadrados √2 - representação gráfica de uma progressão geométrica.

A seqüência de quadrados √2 pode ser utilizada para definir uma razão *Ad Quadratum*.

3.2 A raiz de 3 e a *Vesica Piscis*

O retângulo gerado a partir do quadrado de lado 1 e de sua diagonal √2 determina em sua diagonal a √3 (Figura 3).

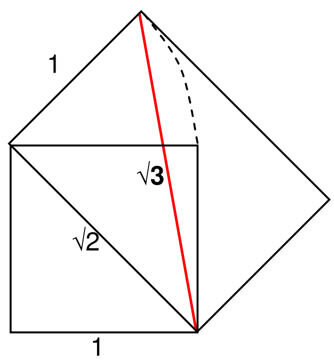


Figura 3: Retângulo com diagonal √3

A √3 foi usada desde o antigo Egito como se pode observar na figura 4 e pode ser obtida também a partir da *Vesica Piscis*, como será demonstrado em seguida.

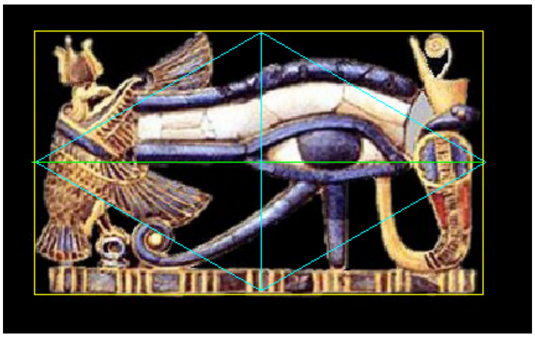


Figura 4: Exemplo de retângulo √3 utilizado pelos egípcios.

A *Vesica Piscis* (Figura 5) é determinada por dois círculos de raios iguais, com centros colineares. O círculo inicial projeta-se externamente em uma simetria de reflexão, com eixo no ponto médio do raio.

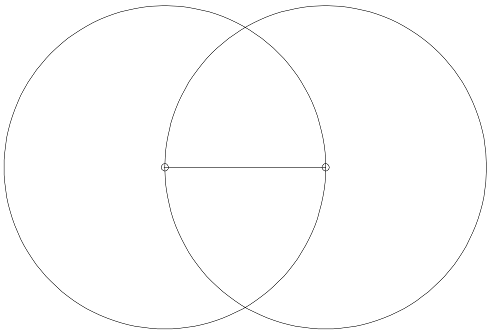


Figura 5: *Vesica Piscis.*

A forma conhecida como *Vesica Piscis* é a área onde há a sobreposição dos dois círculos, definida pelos centros (A e B) e a intersecção das duas circunferências. Esta forma tem forte significado simbólico, aparecendo nas construções e arte religiosas do cristianismo, muitas vezes, simbolizando Cristo (Figura 6).

O desenho apresentado na figura 7 demonstra a proporção √3 no interior da *Vesica Piscis*.

Figura 6: Vesica Piscis no portal da Catedral de Chartres.

Desenhando-se os eixos AB e CD na *Vesica Piscis* e os segmentos CA, AD, DB e BC, pode-se verificar que os segmentos AB, BC, CA, BD e AD são iguais entre si e iguais ao raio AB, comum aos dois círculos. Os triângulos eqüiláteros no interior da *Vesica Piscis,* ABC e ABD são iguais. Prolongando os segmentos CA e CB até encontrar o círculo A e B teremos os pontos F e G. Os segmentos CF e CG são os diâmetros dos dois círculos e, conseqüentemente o dobro do comprimento de qualquer dos lados do triângulo ABC e ABD.

Pelo Teorema de Pitágoras teremos:

$$CD^2 + DG^2 = CG^2$$

$$CD^2 = CG^2 - DG^2$$

$$CD = \sqrt{(CG^2 - DG^2)}$$

Se AB=1 então DG=1 e CG=2, substituindo na fórmula acima, teremos o eixo /maior $CD=\sqrt{3}$

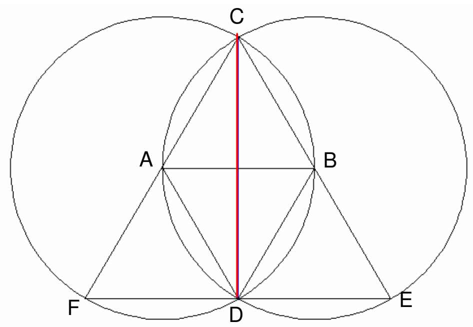


Figura 7: Vesica Piscis com proporção √3

3.3 O retângulo raiz de 5

O retângulo formado pelo quadrado duplo dividido por uma diagonal (AB) forma dois triângulos iguais ABC e ABD (Figura 8). Como são triângulos retângulos, para encontrar o valor da diagonal (hipotenusa do triângulo ABC) aplica-se o Teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

Considerando o cateto a=1 e o cateto b=2, teremos

$$c^2 = 1^2 + 2^2 \quad \text{ou} \quad c = \sqrt{5}$$

Portanto a diagonal (AB) do retângulo (quadrado duplo) é igual a √5 e a semi-diagonal é igual a √5/2.

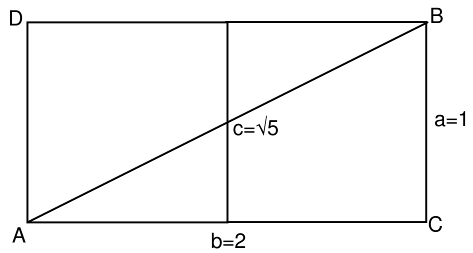


Figura 8: Proporção √5

A partir da semi-diagonal do retângulo ABCD – formado pelo quadrado duplo – pode-se gerar o retângulo √5 EFGH (Figura 9).

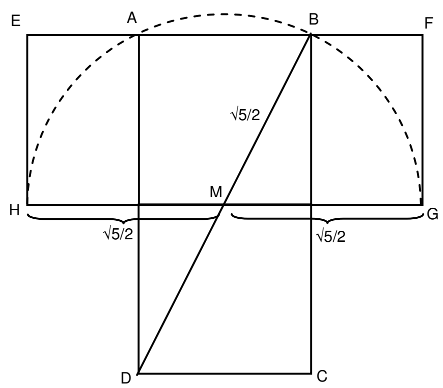


Figura 9: Retângulo √5

A proporção raiz de 5 também pode ser obtida através da divisão da circunferência em cinco partes iguais. Esta divisão, para obtenção do pentágono inscrito, determina um segmento igual √5/2 (MA) – distância do ponto médio do raio (M) ao ponto (A) pertencente à circunferência, determinado pelo raio perpendicular ao primeiro, como é possível observar na figura 10.

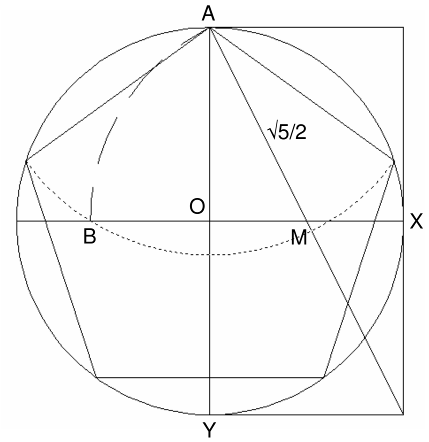


Figura 10: Divisão da circunferência em 5 partes iguais

3.4 Construções simplificadas das raízes de 2, 3, 5 e a Vesica Piscis

Após a demonstração da obtenção das proporções √2, √3 e √5, podemos resumir a obtenção dessas três raízes, consideradas sagradas, em desenhos bastante simples, onde são necessários apenas duas das figuras geométricas básicas – o quadrado e o círculo – para o traçado .

Interessante, também, observar que essas três raízes podem ser obtidas a partir dos dois principais elementos da geometria sagrada, quadrado e círculo, pela construção da *Vesica Piscis*, como apresentado na figura 11.

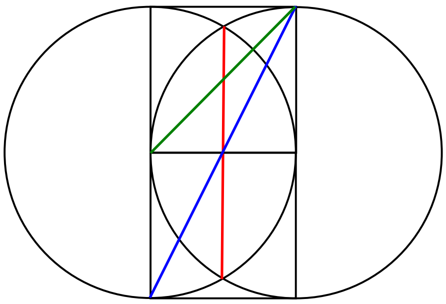


Figura 11: Vesica Piscis com √2, √3 e √5

A Vesica Piscis aparece como um dos principais elementos da geometria sagrada, pois esta forma tem forte significado simbólico. Ela congrega em si a representação da unidade, da célula inicial, da semente e, os polígonos que podem ser gerados a partir dela, estão relacionados ao simbolismo da criação e do crescimento (Figura 12).

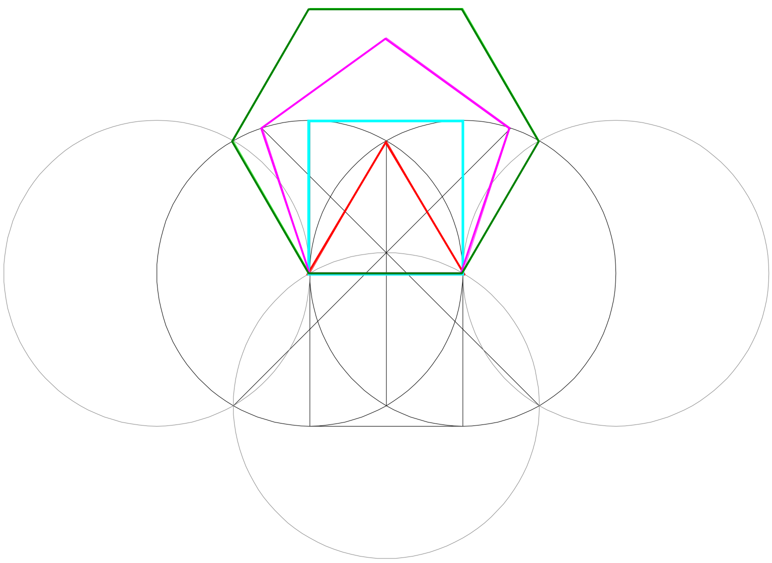


Figura 12: Polígonos regulares gerados a partir da Vesica Piscis.

3.5 O número de ouro

O número de ouro, proporção áurea ou razão áurea é uma constante matemática irracional, presente numa infinidade de elementos da natureza na forma de uma razão. Considerado por muitos como um número sagrado, está presente nas proporções do corpo humano e talvez por isso em vários artefatos criados pelo homem. Esta proporção foi usada desde a antiguidade na arquitetura, engenharia e na arte, sendo considerada como um ideal de beleza e harmonia. É, provavelmente, a mais conhecida das proporções da geometria sagrada.

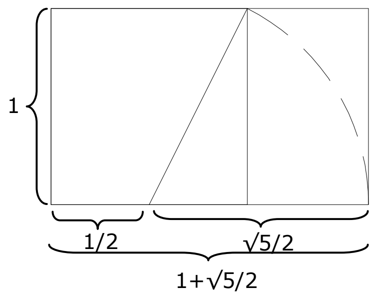
A designação adotada para este número, Φ (Fi maiúsculo), é a inicial do nome de Fídias que foi escultor e arquiteto encarregado da construção do Partenon, em Atenas (Figura 13), que possui sua fachada inscrita em um retângulo áureo.

Figura 13: Fachada do Partenon.

Matematicamente a razão áurea é a divisão de um segmento em duas partes desiguais com uma propriedade particular: o todo está para a parte maior assim como a maior está para a menor. Essa proporção corresponde precisamente a Φ, a que chamamos número de ouro.

Graficamente podemos obter a relação áurea a partir das três figuras geométricas básicas – triângulo, quadrado e círculo, sendo que no círculo ela aparece na divisão da circunferência em cinco partes iguais (Figura 10), e inscrita no pentágono.

A construção geométrica mais famosa, no entanto, é a do retângulo áureo (Figura 14). Trata-se de um retângulo em que os lados estão na proporção dada pela razão áurea. Este retângulo, cuja construção se dá a partir do quadrado, tem a propriedade de permitir a sua divisão sucessiva em figuras semelhantes, assim, obtém-se novos retângulos encaixados com as mesmas propriedades do anterior, cada vez menor.



$DM = 1/2$

$MB = MF = \sqrt{5}/2$

$DF = 1/2 + \sqrt{5}/2$

$$DF = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618 = \Phi$$

Figura 14: Retângulo àureo

Nessa seqüência de retângulos áureos podemos inscrever uma espiral que converge para um ponto chamado pólo e que se encontra na intersecção de duas diagonais: a do retângulo original e a do retângulo de ouro resultante da primeira subdivisão. A espiral inscrita na sucessão de retângulos áureos é chamada logarítmica (Figura 15). Esta espiral pode ser traçada, também, a partir do triângulo isósceles inscrito no pentagrama.

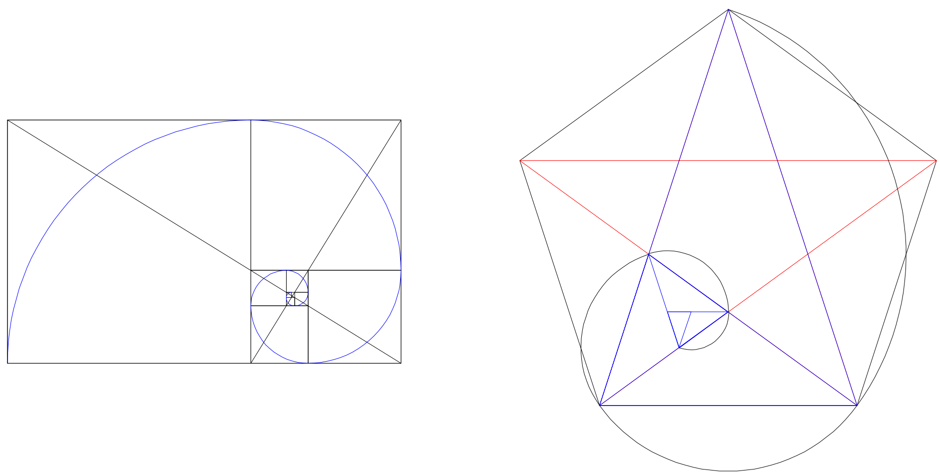


Figura 15: Espiral logarítmica no retângulo e no triângulo áureos.

A espiral logarítmica, como a proporção áurea, se encontra nas situações mais diversas da natureza, aparecem em conchas de animais marinhos (Figura 16), na trajetória de vôo de falcões, em flores e em galáxias.

Figura 16: Espiral logarítmica no interior do Nautilus.
(Fonte:http://pt.wikipedia.org/wiki/Imagem:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg)

3.6 O Ad Quadratum e o Ad Triangulum

Os antigos construtores consideravam que para se criar harmonia, deve-se começar com uma estrutura geométrica sobre a qual se irá preparar um desenho.

Estas estruturas geométricas baseiam-se em dois sistemas de geometria comumente usados e atribuídos aos mestres maçons. O primeiro denominado *Ad Quadratum* tem no quadrado e seus derivados geométricos – quadrado duplo, quadrado √2, √3,... – seu elemento primário. O segundo, denominado *Ad Triangulum* tem por base o triângulo eqüilátero. Essas denominações são utilizadas em qualquer estrutura que se baseie num sistema de proporção que tome o quadrado ou o triângulo eqüilátero como unidade.

O *Ad Quadratum* inicial era formado diretamente do quadrado e do octógono. Colocava-se um quadrado posicionado na direção em que a construção seria realizada e em seguida posicionava-se um outro quadrado de igual tamanho, rotacionado em 45 graus, concêntrico ao primeiro. Nos escritos maçônicos alemães essa figura aparece denominada como *acht-uhr* – oito horas – (Figura 17) e sua criação é atribuída a Albertus Argentinus. A partir desse octógono inicial todo a geometria do edifício podia ser desenvolvida.

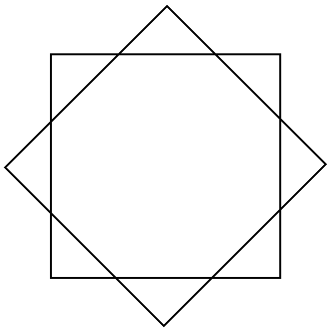


Figura 17: A*cht-uhr.*

Posteriormente, o *acht-uhr* desenvolve-se para uma forma mais complexa, semelhante à utilizada pelos Egípcios para um lugar santo, que estava baseada no quadrado duplo.

Após a utilização do quadrado duplo o *Ad Quadratum* evolui para sua forma mais complexa: o *dodecaid* (Figura 18), um poligrama irregular, com doze pontas, formado por cinco quadrados.

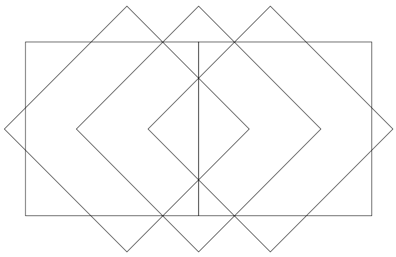


Figura 18: *Dodecaid* formado pelo quadrado duplo.

O *Ad Triangulum* (Figura 19) é uma versão posterior, e representa uma versão mais dinâmica desse sistema, considerado o último método da geometria sagrada criado pelos maçons alemães e, mais utilizado em fachadas que em plantas.

O *Ad Quadratum* (Figura 20) e o *Ad Triangulum* eram tomados como a figura geométrica fundamental para determinar todas as partes do edifício. Todas as dimensões e todas as posições deveriam estar diretamente relacionadas com elas para que as edificações fossem construídas de forma a seguir as leis de proporção e harmonia de acordo com a geometria sagrada.

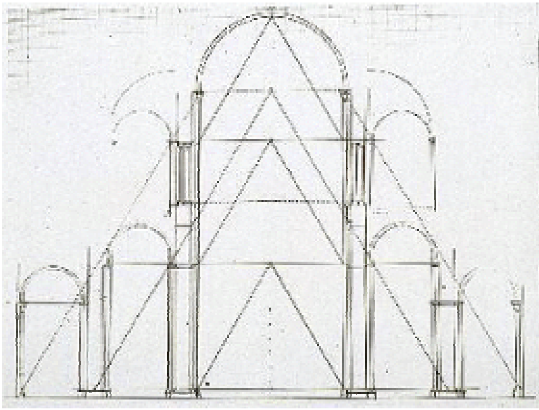


Figura 19: Exemplos de *Ad triangulum,* em elevação*.* (Fonte: http://people.hws.edu/tinkler/10013-1.gif)

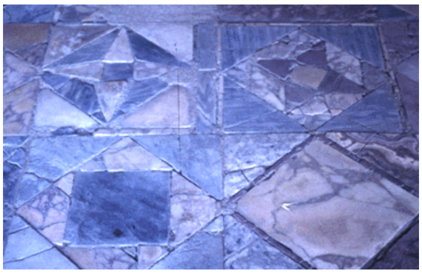


Figura 20: Exemplos de *Ad quadratum*, em fachada e piso.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Dos Sumérios os egípcios e os gregos adquirem o conhecimento da geometria sagrada e evidenciam esse conhecimento nos projetos de seus templos, edifícios e artefatos, que apresentam os princípios de proporção harmônica através de cânones bem definidos.

A utilização do número de ouro (Φ = 1,618) e da proporção áurea em seus artefatos e edifícios pode ser comprovada ainda hoje, ao se analisar os objetos encontrados em sítios arqueológicos. Este fato pode estar ligado ao estabelecimento das primeiras unidades de medidas – palmo, pé, passo, braça, cúbito – baseadas no corpo humano e, da relação destas unidades de medidas com o corpo humano idealizado.

Assim como no Egito, a geometria está presente em todas as esferas do saber grego. Na arte e na arquitetura a geometria está presente em inúmeros objetos e construções. O artista grego busca na contemplação da natureza a inspiração e tenta, através da arte, exprimir suas manifestações. Na sua constante busca da perfeição, ele cria uma arte de elaboração intelectual em que predominam o ritmo, o equilíbrio, a harmonia ideal. Eles têm como características: o racionalismo, amor pela beleza, e o interesse pelo homem, que para eles era a medida de todas as coisas.

Os gregos estabelecem o padrão do homem idealizado, no qual as proporções do corpo estão em perfeita harmonia, tomando a relação áurea como cânone da perfeição.

Na arquitetura, esses cânones de perfeição, têm sua expressão máxima no Partenon. Este templo Ateniense foi construído tendo como base dois elementos da geometria sagrada: para a fachada, as proporções do retângulo áureo e, para as laterais, o fator п. Assim, as partes individuais da estrutura estão todas proporcionais em relação à geometria do edifício como um todo.

O maior mérito desta época é o poder de sistematização do conhecimento que os grandes pensadores, filósofos e matemáticos gregos possuíam, deixando para a humanidade o registro, de forma organizada, do conhecimento desenvolvido, até então.

Esse conhecimento foi resgatado na arquitetura e arte renascentista, assim como na idade média onde a aplicação do conhecimento da geometria sagrada na arquitetura tem seu apogeu com as catedrais góticas.

Referencias Bibliográficas

[1]PENNICK, N. **Geometria Sagrada. Simbolismo e Intenções nas Estruturas Religiosas.** Editora Pensamento – Cultrix Ltda. São Paulo, 15 ª edição, 1989. (1980)

[2]RUBINO, A. Disponível em: <http://freeweb.supereva.com/flobert/geometria_sacra.htm?p> . Acesso em 14 mar. 2005.

[3]VITRUVIUS POLLIO. Tratado de Arquitetura. Tradução de M. Justino Maciel. São Paulo: Martins Fontes, 2007.